О. С. ИВАШЕВ-МУСАТОВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Допущено Министерством приборостроения, средств автоматизации и систем управления в качестве учебного пособия для техникумов по специальности «Прикладная математика»

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

22.17
И 24
УДК 519.2

Теория вероятностей и математическая статистика. Ивашев-Мусатов О. С. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, М., 1979.

В книге кратко излагаются начала теории вероятностей. Читатель знакомится со случайными величинами и их основными характеристиками. Рассматриваются основные предельные теоремы и показана их роль для практики. Последнее связано с математической статистикой и обработкой результатов наблюдений.

Все темы снабжены набором упражнений с ответами.

Книга рассчитана на учащихся техникумов по специальности «Прикладная математика»; может быть использована во втузах.

Олег Сергеевич Ивашев-Мусатов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

М., 1979 г., 256 стр. с илл.

Редактор *Е. Ю. Ходан*
Техн. редактор *Л. В. Лихачева*
Корректоры *О. М. Кривенко, Т. С. Плетнева*

ИБ № 11252

Сдано в набор 28.12.78. Подписано к печати 09.04.79. Бумага $84\times108^1/_{32}$, тип. № 2. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 13,44. Уч.-изд. л. 14,34. Тираж 57 000 экз. Заказ № 3561. Цена книги 50 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

$И\dfrac{20203-072}{053(02)\text{-}79}$ 25-79 1702060000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В школьном курсе математики и физики обычно рассматриваются только такие задачи, в которых результат действия однозначно определен. Например, если выпустить камень из рук, то он начинает падать с постоянным ускорением. Положение камня может быть вычислено в любой момент времени. Однако есть большой круг задач, имеющих большое значение в науке и ее технических и хозяйственных приложениях, в которых результат действия не определен однозначно. Например, если подбросить монету, то нельзя предсказать, какой стороной она ляжет вверх — гербом или цифрой. Здесь результат наших действий не определен однозначно. Может показаться, что в подобных задачах ничего определенного сказать нельзя, но даже обычная игровая практика показывает обратное: при большом числе бросаний монеты примерно в половине случаев выпадет герб, а в половине случаев — цифра. А это уже определенная закономерность. Подобного рода закономерности и изучаются в теории вероятностей. Изменяется в корне сама постановка задачи. Нас уже интересует не результат определенного опыта, а то, что получится после многократного повторения этого опыта. Коротко говорят, что в теории вероятностей изучаются закономерности массовых случайных событий.

Пример с бросанием монеты был приведен только потому, что это самая простая и хорошо знакомая ситуация, в которой результат нашего действия не определен однозначно. Но есть много задач самого разного содержания, для которых опыт с бросанием монеты может служить моделью. Однако в большинстве практических задач возникают и более сложные вопросы.

Возьмем одну из важных задач народного хозяйства — организацию телефонной связи в районе (области). Сколько надо протянуть телефонных линий к районному (областному) центру? Это тоже чисто вероятностная задача. Заранее нельзя предсказать, сколько вызовов и в какой час поступит в районный центр. Если телефонных линий провести слишком мало, то до центра дозвониться будет очень трудно. Если же их провести много, то дозвониться будет просто, но большая часть телефонной сети будет простаивать, т. е. затраты на организацию связи получатся завышенными. С аналогичными проблемами мы сталкиваемся и в ряде транспортных задач. Например, как организовать работу в порту? Сколько надо погрузочно-разгрузочного оборудования? Суда, совершающие дальние рейсы, не могут выдерживать точного расписания (из-за погоды, поломок и т. п.). Поэтому приход судов в порт тоже относится к категории случайных событий. И планирование оборудования порта должно строиться в соответствии с выводами из теории вероятностей. Если оборудования мало, то суда будут долго стоять под разгрузкой (погрузкой); если же оборудования очень много, то очереди на погрузку (разгрузку) не будет, но при этом большая часть портового оборудования будет простаивать.

Большое число вероятностных задач возникает при постановке экспериментов и в планировании. Например, сколько опытов надо поставить, чтобы выводы из них были достоверны? Если опытов слишком мало, то, естественно, возникает сомнение, что результаты опытов случайны. Конечно, чем больше опытов, тем надежнее сделанные из них выводы. Но сколько надо сделать опытов для получения надежных выводов? Ведь каждый опыт — это затраченные деньги, и здесь тоже не должно быть неоправданного перерасхода средств. Теория вероятностей и здесь приходит на помощь. Имеется целый ряд рекомендаций, обосновывающих необходимое количество опытов для получения достаточно надежных результатов.

И еще пример вероятностной задачи. Пусть речь идет о распределении мест между классами по результатам контрольной работы. Для этого в каждом классе выводится средняя оценка (среднее арифметическое из всех оценок, полученных в классе за контрольную работу). Спрашивается, сколько знаков после запятой корректно учитывать при таком сравнении? Оказывается, что для классов в 30—40 человек корректно вычислять оценки с точностью до 0,1. Ну, а если аналогичное сравнение захотят сделать, например, по техникумам? Сколько знаков при вычислении среднего балла по техникуму тогда корректно брать? Оказывается, что для того, чтобы можно было учитывать и сотые, необходимо, чтобы число принимаемых во внимание контрольных работ было порядка 2500.

Приведенные примеры уже дают некоторое представление о круге задач, которые решаются при помощи теории вероятностей. Однако решение этих задач требует уже большой теоретической подготовки. Поэтому вначале будут решаться более простые задачи (имеющие игровой характер), поскольку в них гораздо проще обнаружить вероятностные закономерности. Но и на них уже можно будет проследить основные вероятностные закономерности и специфику постановки и решения вероятностных задач.

Выше были приведены примеры, поясняющие характер задач, рассматриваемых в теории вероятностей. Но что же такое сама теория вероятностей? Для ответа на этот вопрос откроем энциклопедию. Читаем: «Теория вероятностей — математическая наука, позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким-либо образом с первыми».

В этом определении есть целый ряд понятий: случайное событие, вероятность случайного события, связь между случайными событиями. Все эти понятия нуждаются в определении и разъяснении. В усвоении этого круга вопросов и состоит первое знакомство с теорией вероятностей.

Теория вероятностей возникла и развивалась в процессе решения ряда отдельных задач игрового и прикладного характера. Первые дошедшие до нас сведения относятся к XVI—XVII векам и связаны с решением задач, возникающих в азартных играх (Д. Кардано, Х. Гюйгенс, Б. Паскаль, П. Ферма и др.). Затем стали возникать и развиваться прикладные задачи (в первую очередь вопросы страховки от несчастных случаев и стихийных бедствий). Постепенно выделился круг задач со специфической (как мы теперь говорим — вероятностной) постановкой вопроса и методикой их решения, оформились первые определения и теоремы. Первая теорема, установившая связь между теорией и практикой и давшая начало целой серии так называемых «предельных теорем» теории вероятностей, была доказана в конце XVII века Я. Бернулли (1654—1705). Затем развитие теории вероятностей продолжалось в работах А. Муавра (1667—1754), П. Лапласа (1749—1827), К. Гаусса (1777—1855), С. Пуассона (1781—1840) и особенно в работах русского математика П. Л. Чебышева (1821—1894) и его учеников А. А. Маркова (1856—1922) и А. М. Ляпунова (1857—1918). В XX веке наибольшее развитие и окончательное оформление как математической науки теория вероятностей получила в работах советских математиков.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Алгебра событий

1. Случайные события. В теории вероятностей окружающая нас жизнь изучается не во всей ее сложности, а только с одной определенной стороны. При этом строится некоторая схема (или модель), которая более или менее полно отражает интересующую нас сторону жизни. Например, в геометрии изучаются свойства фигур: точек, прямых, плоскостей и т. п. Но в реальной жизни мы не наблюдаем таких объектов — это результаты моделирования (схематизирования, абстрагирования) определенной стороны реальной жизни. В физике рассматриваются материальная точка, идеальный газ, абсолютно твердое тело и т. п. Это тоже модели определенной стороны реальной жизни — в природе мы не наблюдаем материальных точек, идеального газа, абсолютно твердого тела и т. п.

В теории вероятностей рассматривается следующая модель изучаемых явлений реальной жизни: проводится опыт (испытание), в результате происходят случайные события (обычно говорят короче — события). Например, бросают монету и смотрят, что выпало. В результате этого опыта может выпасть герб — это одно событие, а может выпасть цифра — это другое событие. Поскольку выпадение герба зависит от случая, то это случайное событие. Данная схема содержит как частный случай уже знакомые задачи, имеющие однозначно определенный результат действия.

События принято обозначать буквами $A, B, C, \ldots$ Например, в опыте с бросанием монеты событие «выпал герб» будем обозначать буквой $Г$. При этом пишут $Г$ = «выпал герб». Аналогично записывают $Ц$ = «выпала цифра».

Как правило, одна и та же буква может обозначать разные события — надо только каждый раз точно указать, какое именно (подобно тому как при решении геометрических задач буква A в одной задаче обозначает одну точку, а в другой задаче — другую). Но есть два события, выделяющиеся из массы остальных, за которыми закреплены определенные буквы.

Определение. Событие называется *достоверным* и обозначается буквой E, если оно обязательно происходит в результате опыта.

Например, в результате бросания монеты обязательно произойдет событие «выпал герб или цифра» — это достоверное событие.

Определение. Событие называется *невозможным* и обозначается буквой U, если оно не может произойти в результате рассматриваемого опыта.

Например, при бросании монеты событие «не выпало ни герба, ни цифры» произойти не может — это невозможное событие.

Рассмотрим еще один опыт, более богатый событиями, чем опыт с бросанием монеты, — бросание игральной кости. Он состоит в том, что бросают игральную кость (кубик, на сторонах которого точками указаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6) и смотрят, сколько выпало очков (т. е. какое число указано на грани, оказавшейся сверху). При этом могут произойти следующие события:

Q_1 = «выпало 1 очко», Q_4 = «выпало 4 очка»,
Q_2 = «выпало 2 очка», Q_5 = «выпало 5 очков»,
Q_3 = «выпало 3 очка», Q_6 = «выпало 6 очков».

Но в этом опыте можно рассматривать и другие события, например:

$Q_{пр}$ = «выпало простое число очков»,
$Q_{зк}$ = «число выпавших очков делится на три»,
$Q_ч$ = «число выпавших очков четно»,
$Q_н$ = «число выпавших очков нечетно».

Уже в этом простом опыте мы можем заметить некоторые типы связей между событиями. Например, события $Q_ч$ и $Q_н$ не могут произойти одновременно. Действительно, число выпавших очков или четно (т. е. произошло событие $Q_ч$), или нечетно (когда произошло событие $Q_н$). Этот вид связи между событиями можно наблюдать и в других опытах — он носит определенное название.

Определение. Два события называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно в рассматриваемом опыте. События, которые в рассматриваемом опыте могут произойти одновременно, называются *совместными*.

Например, в опыте с бросанием игральной кости события $Q_ч$ и $Q_{пр}$ совместны. Действительно, пусть выпало 2 очка. Число 2 четное; следовательно, произошло событие $Q_ч$. С другой стороны, число 2 простое; следовательно, произошло событие $Q_{пр}$. Таким образом, события $Q_ч$ и $Q_{пр}$ совместны. Аналогично, совместны и события $Q_з$ и $Q_{пр}$. Однако между совместностью пары событий $Q_з$ и $Q_{пр}$, с одной стороны, и пары событий $Q_ч$ и $Q_{пр}$, с другой стороны, наблюдается существенная разница. Для первой пары из того, что произошло событие $Q_з$, следует, что произошло событие $Q_{пр}$. Для второй же пары это не так. В самом деле, предположим, что выпало 4 очка, т. е. произошло событие $Q_ч$. Событие $Q_{пр}$ при этом не произошло, так как 4 не является простым числом, т. е. для второй пары из того, что произошло одно из совместных событий, еще не следует, что произошло другое. Таким образом, мы подошли к следующему определению.

Определение. Событие A *благоприятствует* событию B, если из того, что произошло событие A, следует, что произошло событие B (пишут: $A \subset B$).

Так, в опыте с бросанием игральной кости $Q_з \subset Q_{пр}$.

Для дальнейшего важно отметить следующий факт. В опыте с бросанием игральной кости события Q_1, Q_2, ..., Q_6 выделяются: они попарно несовместны, и в результате опыта одно из них обязательно происходит. Обнаружение подобного множества событий для рассматриваемого опыта весьма существенно при решении вероятностных задач (в этом мы убедимся далее).

Определение. Множество событий рассматриваемого опыта, одно из которых в результате опыта обязательно происходит, а любые два из которых несовместны, называется *множеством исходов* (или элементарных событий, или полной группой событий) этого опыта. Каждое событие из этого множества называется *исходом* (или элементарным событием) рассматриваемого опыта.

Так, в опыте с бросанием игральной кости события Q_1, Q_2, ..., Q_6 суть исходы этого опыта. Надо подчеркнуть, что для одного и того же опыта можно рассматривать разные множества исходов. Например, для опыта с бросанием игральной кости можно рассматривать множество из двух исходов $Q_ч$ и $Q_н$. В самом деле, эти события несовместны и в результате опыта одно из них обязательно происходит. От того, насколько удачно выбрано множество исходов опыта, зависит бо́льшая или меньшая сложность решения поставленной вероятностной задачи: при удачном выборе решение сильно упрощается, а при неудачном или усложняется, или вообще не может быть найдено.

Понятие исходов опыта позволяет установить связь между теорией вероятностей и теорией множеств и придать многим утверждениям большую наглядность (подобно тому как при помощи графика функции просто и наглядно разъясняются многие факты). Начнем с примеров. В опыте с игральной костью любое событие может быть описано множеством исходов этого опыта, благоприятствующих рассматриваемому событию. Например, событие $Q_ч$ описывается подмножеством исходов $\{Q_2; Q_4; Q_6\}$, а событие $Q_{пр}$—подмножеством исходов $\{Q_2; Q_3; Q_5\}$ и т. п. Вместо того, чтобы говорить: событие A = «выпало 3 очка или 5 очков», достаточно указать множество исходов опыта, благоприятствующих событию A,—в нашем случае это $\{Q_3; Q_5\}$.

Аналогичное положение и в общем случае. Каждое событие в рассматриваемом опыте однозначно определяет некоторое подмножество исходов этого опыта. И обратно, каждое подмножество исходов опыта определяет некоторое событие в этом опыте (этому событию благоприятствуют те и только те исходы опыта, которые принадлежат взятому подмножеству). И событие и подмножество исходов опыта, благоприятствующих этому событию, мы будем обозначать одной и той же буквой.

События будем изображать так же, как в школьном курсе принято изображать множества (рис. 1).

Совместность и несовместность событий легко распознать по графическому изображению (рис. 2 и 3 соответственно). Действительно, на рис. 2 указано, что есть исход опыта, благоприятствующий и событию A и событию B (этот исход принадлежит пересечению множеств $A \cap B$ — на рис. 2 оно дважды заштриховано). Если в результате опыта этот исход произошел, то это значит, что произошло и событие A и событие B, т. е. эти события совместны. На рис. 3 изображен случай, когда нет исходов опыта, благоприятствующих и событию A и событию B, т. е. когда эти события

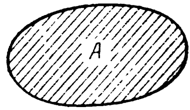


Рис. 1.

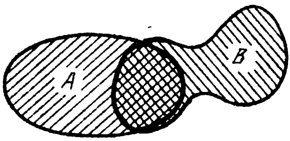


Рис. 2.

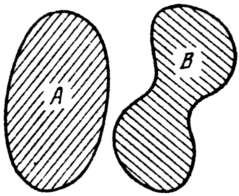


Рис. 3.

несовместны. В самом деле, предположим противное: события A и B, изображенные на рис. 3, совместны. Это значит, что в результате опыта может произойти событие, состоящее в том, что произошло и событие A и событие B. Этому новому событию благоприятствует некоторый исход опыта (в результате опыта один из исходов обязательно происходит). Этот исход тогда принадлежит пересечению множеств, что противоречит ситуации, изображенной на рис. 3. Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение (события A и B совместны) неверно. Следовательно, события A и B несовместны.

А какое событие определяется всем множеством исходов опыта? Поскольку в результате опыта один из его исходов обязательно происходит (по определению множества исходов опыта), то множество всех исходов опыта определяет достоверное событие E. Обычно исходы опыта обозначаются $E_1, E_2, \ldots, E_n$, поэтому $E=\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$.

А какое событие определяется пустым подмножеством множества исходов опыта? Поскольку в результате опыта один из исходов обязательно происходит, то пустое подмножество исходов опыта, очевидно, определяет невозможное событие U.

Упражнения. В приведенных ниже опытах укажите совместные и несовместные события, а также какое событие какому благоприятствует.

1. Опыт—бросание одной монеты; события: $Ц$=«выпала цифра» и $Г$=«выпал герб».

2. Опыт—бросание двух монет; события: A=«хотя бы на одной из монет выпала цифра», B=«хотя бы на одной из монет выпал герб», C=«на обеих монетах выпала цифра», D=«на обеих монетах выпал герб».

3. Опыт—два выстрела по мишени; события: A=«ни одного попадания», B=«одно попадание», C=«два попадания», D= =«нет промаха», H=«есть хотя бы одно попадание».

4. Опыт—вынимание косточки домино; события: A=«вынуто 6 очков», B=«вынуто 3 очка», C=«на вынутой косточке три и пусто».

5. Будут ли в упр. 2 события A и B множеством исходов опыта?

6. Будут ли в упр. 2 события C и D множеством исходов опыта?

7. Какое третье событие H надо добавить к событиям C и D из упр. 2, чтобы получить множество исходов опыта?

8. Укажите множество исходов опыта в упр. 3.

9. В опыте с бросанием игральной кости изобразите множество исходов этого опыта и события $Q_{ч}$, $Q_{пр}$, $Q=\{Q_1; Q_5; Q_6\}$.

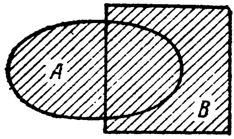
10. В упр. 2 изобразите указанные события на одном и том же рисунке.

11. В упр. 3 изобразите указанные события на одном и том же рисунке.

12. В упр. 4 изобразите указанные события на одном и том же рисунке.

2. Алгебра событий. Из школьного курса математики вы знаете, что с множествами можно производить действия—объединения и пересечения. Аналогичные действия мы будем производить и над событиями — это будут те связи между событиями, о которых говорилось в определении теории вероятностей. При этом свойства этих действий будут во многом походить на свойства действий сложения и умножения в алгебре. Это позволит производить вычисления с событиями почти так же, как это делается в алгебре с числами и выражениями, отсюда и название данного раздела — алгебра событий.

Приведем сначала некоторые разъяснения, подводящие к понятию объединения событий. Рассмотрим два события A и B. Это два множества A и B исходов опыта. Объединение этих множеств $A \cup B$ — это некоторое множество исходов опыта, т. е. некоторое событие. Это событие называется объединением событий A и B и обозначается $A \cup B$ (см. рис. 4).



$A \cup B$

Рис. 4.

А как охарактеризовать объединение событий, пользуясь только терминологией теории вероятностей (т. е. терминами «событие произошло» и «событие не произошло»)?

Событию $A \cup B$ благоприятствуют исходы опыта, которые благоприятствуют хотя бы одному из этих событий (или событию A, или событию B, или одновременно и событию A и событию B). Следовательно, событие $A \cup B$ состоит в том, что произошло хотя бы одно из двух событий (или A, или B, или A и B одновременно).

Аналогично можно рассматривать объединение любого числа событий. Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение. *Объединением событий $A, B, C, \ldots$* называется событие, состоящее в том, что в результате опыта произошло хотя бы одно из указанных событий. Объединение этих событий обозначается $A \cup B \cup C \cup \ldots$

Пример 1. Бросается игральная кость. Событие $Q_1 \cup Q_3 \cup Q_5$ состоит в том, что произошло хотя бы одно из событий Q_1, Q_3, Q_5 (выпадение нечетного числа очков). Поэтому можно записать равенство

$$Q_н = Q_1 \cup Q_3 \cup Q_5.$$

Пример 2. В электрическую цепь параллельно включены два выключателя. Каждый из них может быть как включен, так и выключен. Рассмотрим события: $A =$ «выключен выключатель № 1», $B =$ «включен выключатель № 2», C = «по цепи идет ток». Тогда при замыкании цепи $C = A \cup B$.

Пример 3. В воскресенье друзья могли пойти или на футбол, или на баскетбол, или на волейбол. Рассмотрим события: A = «друзья пошли на футбол», B = «друзья пошли на баскетбол», C = «друзья пошли на волейбол» и H = «друзья пошли на соревнование». Тогда $H = A \cup B \cup C$.

Пример 4. Пусть событию A благоприятствуют исходы опыта $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Тогда $A = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_m$, поскольку событие A происходит, если произошел хотя бы один из указанных исходов опыта. Это объединение часто записывают короче так:

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} E_k.$$

Пример 5. Пусть событию A благоприятствуют исходы опыта (номера которых могут идти не подряд) $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_m}$. Тогда

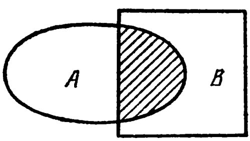
$$A = \bigcup_{s=1}^{m} E_{i_s},$$

как и в предыдущем примере.

Из определения объединения событий следует, что

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

Теперь введем вторую операцию — пересечение событий. В школьном курсе математики кроме объединения множеств рассматривалось еще и их пересечение. Перенесем это понятие и на события. Рассмотрим сначала два события A и B. Это два множества исходов опыта. Рассмотрим пересечение $A \cap B$ этих множеств. Это тоже некоторое множество исходов опыта, т. е. некоторое событие в рассматриваемом опыте. Оно называется пересечением событий A и B и обозначается $A \cap B$. На рис. 5 изображено пересечение событий A и B — оно заштриховано.



$A \cap B$

Рис. 5.

Перейдем теперь к вероятностной характеристике пересечения событий (т. е. к формулировке, в которой используются вероятностные термины «событие произошло» и «событие не произошло»).

Событию $A \cap B$ благоприятствуют исходы опыта, которые благоприятствуют и событию A и событию B. Следовательно, событие $A \cap B$ состоит в том, что в результате опыта произошло и событие A и событие B (т. е. эти события произошли одновременно).

Аналогично можно рассматривать пересечение любого числа событий.

Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение. *Пересечением событий* $A, B, C, \ldots$ называется событие, состоящее в том, что в результате опыта произошли все указанные события. Это событие обозначается $A \cap B \cap C \cap \ldots$

Пример 6. Бросили игральную кость. Событие $Q_{\text{пр}} \cap Q_{\text{ч}}$ состоит в том, что выпало 2 очка. Это записывается так:

$$Q_{\text{пр}} \cap Q_{\text{ч}} = Q_2.$$

Пример 7. В электрическую цепь последовательно подсоединены два выключателя. Каждый из них может быть как включен, так и выключен. Рассмотрим события: A = «включен выключатель № 1», B = «включен выключатель № 2» и C = «по цепи идет ток». Тогда при включении этой электрической цепи справедливо равенство $C = A \cap B$.

Пример 8. Васильев и Петров договорились в воскресенье пойти на футбол, если Петров купит в субботу билеты, Васильев исправит неудовлетворительную оценку и если в воскресенье не будет дождя. Рассмотрим события: A = «Петров в субботу купил билеты на футбол», B = «Васильев исправил неудовлетворительную оценку», C = «в воскресенье нет дождя» и H = «Петров и Васильев в воскресенье пошли на футбол». Ясно, что

$$H = A \cap B \cap C.$$

Из определения пересечения событий непосредственно следуют формулы

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C.$$

Таким образом, действия объединения и пересечения событий обладают знакомыми из алгебры свойствами — переместительным и сочетательным. Оказывается, что действия объединения и пересечения связаны распределительным законом (как сложение и умножение в алгебре):

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \qquad (1)$$

Это наглядно видно из рис. 6 и 7. На рис. 6 дважды заштрихованная фигура изображает левую часть ра-

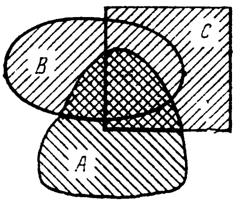


Рис. 6.

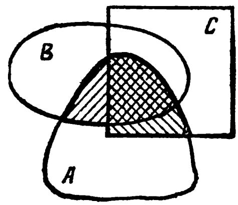


Рис. 7.

венства (1). На рис. 7 заштрихованная фигура изображает правую часть равенства (1). Ясно, что на рис. 6 и 7 выделена одна и та же фигура, она изображает одно и то же событие, т. е. левая и правая части в равенстве (1) равны.

Дадим теперь доказательство распределительного закона (равенства (1)), не опирающееся на рисунки.

Пусть E_k — произвольный исход опыта. Тогда

$$E_k \subset A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow E_k \subset A \text{ и } (E_k \subset B \text{ или } E_k \subset C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (E_k \subset A \text{ и } E_k \subset B) \text{ или } (E_k \subset A \text{ и } E_k \subset C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E_k \subset (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

т. е. каждый исход опыта, благоприятствующий событию $A \cap (B \cup C)$ — левая часть равенства (1), благоприятствует и событию $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ — правая часть равенства (1), и обратно. Следовательно, множества исходов опыта, благоприятствующих рассматриваемым событиям, равны. А потому равны и события, и равенство (1) доказано.

Теперь можно производить вычисления с событиями почти так же, как и в алгебре вычисляют с числами и выражениями. Надо только иметь в виду некоторые особенности, например:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

Пользуясь введенными действиями, уже можно некоторые высказывания относительно событий записывать в виде формул.

Пример 9. Если события A и B несовместны, то событие $A \cap B$ невозможно (события несовместны, если они не могут произойти одновременно в результате опыта). Следовательно, запись

$$A \cap B = U$$

выражает утверждение «события A и B несовместны».

Пример 10. Пусть в результате опыта одно из событий A, B или C должно обязательно произойти. Это значит, что событие $A \cup B \cup C$ достоверное. Следовательно, запись

$$A \cup B \cup C = E$$

выражает утверждение «в результате опыта обязательно произойдет или событие A, или событие B, или событие C».

Пример 11. Пользуясь результатами примеров 9 и 10, легко записать в виде формул утверждение «множество событий $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ есть множество исходов данного опыта»:

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = E \quad \text{и} \quad E_i \cap E_j = U \text{ при } i \neq j.$$

В алгебре особую роль играют числа 0 и 1. В алгебре событий аналогичную особую роль играют невозможное событие U и достоверное событие E (при этом объединение событий аналогично сложению чисел, а пересечение событий аналогично произведению чисел). Равенства в алгебре событий

$$A \cap E = A, \quad A \cup U = A, \quad A \cap U = U$$

(докажите их самостоятельно) аналогичны, соответственно, алгебраическим равенствам

$$a \cdot 1 = a, \quad a + 0 = a, \quad a \cdot 0 = 0.$$

Наряду с объединением событий рассматривается разность событий.

Определение. *Разностью* $A \setminus B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что в результате опыта произошло событие A и не произошло событие B.

Таким образом, событию $A \setminus B$ благоприятствуют исходы опыта, которые благоприятствуют событию A, но не благоприятствуют событию B. Разность $A \setminus B$ изображена на рис. 8.

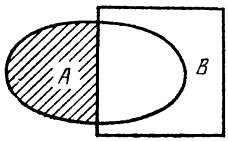


Рис. 8.

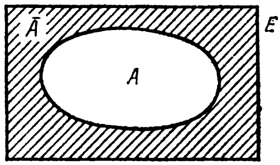


Рис. 9.

Пример 12. В опыте с бросанием кости

$$Q_{\text{пр}} \setminus Q_{\text{н}} = Q_2, \quad Q_{\text{пр}} \setminus Q_2 = Q_3 \cup Q_5.$$

Пример 13. Пользуясь понятием разности событий, утверждение «событие A не произошло» можно записать в виде формулы: $E \setminus A$. Действительно, любой исход, благоприятствующий событию A, не благоприятствует событию $E \setminus A$. Следовательно, если произошло событие $E \setminus A$, то событие A не произошло.

При решении многих задач требуется коротко записать «событие A не произошло».

Определение. Событие $\bar{A} = E \setminus A$ называется *противоположным* событию A или событием «не A».

На рис. 9 заштрихованная фигура изображает событие $\bar{A}$.

Пример 14. В опыте с бросанием кости $\bar{Q}_{\text{н}} = Q_{\text{ч}}$.

Упражнения. Докажите следующие равенства:

1. $A \cap E = A$.
2. $A \cup U = A$.
3. $A \cap U = U$.
4. $A \cup E = E$.
5. $\bar{U} = E$.

6. $\overline{E}=U$.

7. $\overline{\overline{A}}=A$.

8. $A\setminus A=U$.

9. $A\setminus E=U$.

10. $A\setminus B=A\cap\overline{B}$.

11. $A\cap\overline{A}=U$.

12. $A\cup\overline{A}=E$.

13. $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

14. $A\cap B\subset A$.

15. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

16. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

17. $A\subset B\Rightarrow A\setminus B=U$.

18. $A\cup B=(B\setminus(A\cap B))\cup A$.

19. $A\cap(B\setminus(A\cap B))=U$.

20. Верно ли, что $A\cup B=C\Rightarrow A=C\setminus B$?

21. Всегда ли верно равенство $A=(A\cup B)\setminus B$? Приведите (на рисунках) примеры, когда это верно и когда это неверно.

22. Докажите, что $B\subset A\Rightarrow A=B\cup(A\setminus B)$.

23. Всегда ли верно равенство $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$? Приведите (на рисунках) примеры, когда это верно и когда это неверно.

24. Какие из записанных равенств справедливы (приведите на рисунках соответствующие случаи), а какие — нет?

а) $A\setminus B=A$. б) $A\setminus B=U$. в) $A\setminus B=B$.

25. Запишите короче приведенные ниже выражения:

а) $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{57}$; б) $A_2\cup A_5\cup A_8\cup\ldots\cup A_{32}$;

в) $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{43}$; г) $A_7\cap A_{12}\cap A_{17}\cap\ldots\cap A_{102}$.

26. Расшифруйте приведенные ниже краткие записи:

а) $\bigcup\limits_{i=5}^{11} A_i$; б) $\bigcap\limits_{j=2}^{7} A_j$; в) $\bigcup\limits_{k=1}^{5} A_{4k-3}$; г) $\bigcap\limits_{s=3}^{6} A_{2s-1}$.

27. Опыт состоит в том, что бросают две монеты — медную и серебряную.

Рассматриваются следующие события:

A = «герб выпал на медной монете»,
B = «цифра выпала на медной монете»,
C = «герб выпал на серебряной монете»,
D = «цифра выпала на серебряной монете»,
M = «выпал хотя бы один герб»,
F = «выпала хотя бы одна цифра»,
G = «выпал один герб и одна цифра»,
H = «не выпало ни одного герба»,
K = «выпали два герба».

Каким событиям из приведенного списка равны следующие события:

а) $A\cup C$; б) $A\cap C$; в) $M\cap F$; г) $G\cup M$; д) $G\cap M$;
е) $B\cap D$; ж) $M\cup K$?

28. По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события A_k = «попадание при k-м выстреле», $k=1, 2, 3$. Пользуясь

действиями над событиями A_k и $\overline{A}_k$, записать события:

A = «все три попадания»,
B = «все три промаха»,
C = «хотя бы одно попадание»,
D = «хотя бы один промах»,
M = «не меньше двух попаданий»,
F = «не более одного попадания»,
G = «попадание в мишень не раньше третьего выстрела».

29. В поле наблюдения микроскопа находятся четыре клетки. За время наблюдения каждая из них может как разделиться, так и не разделиться. Рассматриваются события:

A = «разделилась одна клетка»,
B = «разделилась хотя бы одна клетка»,
C = «разделилось не менее двух клеток»,
D = «разделились две клетки»,
M = «разделились три клетки»,
F = «разделились все четыре клетки».

В чем состоят события:

а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $B \cup C$; г) $B \cap C$;
д) $D \cup M \cup F$; е) $B \cap F$?

Верны ли равенства:

ж) $B \cap F = C \cap F$; з) $B \cap C = D$?

30. Назовите противоположные события для событий:

A = «выпадение двух гербов при бросании двух монет»,
B = «появление белого шара» (опыт состоит в вынимании одного шара из урны, в которой лежат белые, черные и красные шары),
C = «три попадания при трех выстрелах»,
M = «не более двух попаданий при пяти выстрелах»,
D = «хотя бы одно попадание при пяти выстрелах»,
F = «выигрыш первого игрока при игре в шахматы».

31. На рис. 10—13 изображены электрические схемы. Выключатели изображены кружками, в которых указан номер выключателя. Записать через событие A_k = «включен выключатель с номером k» для каждой схемы следующие события: A = «ток идет» и $\overline{A}$ = «ток не идет».

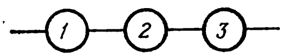


Рис. 10.

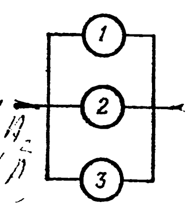


Рис. 11.

32. Прибор состоит из двух блоков. Первый блок состоит из двух однотипных деталей и работает при исправности хотя бы одной из них. Второй блок состоит из трех однотипных деталей и работает при исправности хотя бы двух из них. Весь прибор работает, если работают оба блока. Выразите через события A_k=«исправна k-я деталь первого блока» ($k=1, 2$), B_n=«исправна n-я деталь второго блока» ($n=1, 2, 3$) и противоположные им следующие события:

A=«работает первый блок»,
B=«первый блок не работает»,
C=«работает второй блок»,
D=«второй блок не работает»,
H=«прибор работает»,
F=«прибор не работает»,
G=«прибор не работает, но для того, чтобы его исправить, достаточно заменить одну деталь».

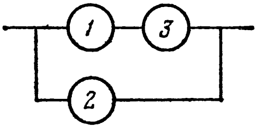


Рис. 12.

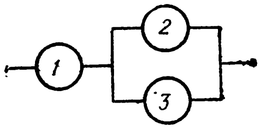


Рис. 13.

33. Прибор состоит из двух блоков. Первый блок состоит из четырех одинаковых деталей и работает при исправности хотя бы двух из них. Второй блок состоит из пяти одинаковых деталей и работает при исправности хотя бы трех из них. Весь прибор работает, если работают оба блока. Выразите через события A_k=«исправна k-я деталь первого блока» ($k=1, 2, 3, 4$), B_n= =«исправна n-я деталь второго блока» ($n=1, 2, 3, 4, 5$) и противоположные им следующие события:

A=«первый блок работает»,
B=«первый блок не работает»,
C=«второй блок работает»,
D=«второй блок не работает»,
H=«прибор работает»,
F=«прибор не работает»,
G=«для того чтобы прибор работал, достаточно заменить две детали».

34. Имеем события: A=«взятая наудачу деталь оказалась первого сорта», B=«взятая наудачу деталь оказалась второго сорта» и C=«взятая наудачу деталь оказалась третьего сорта». Что представляют собой следующие события:

а) $A\cup B$; б) $\overline{A\cup C}$; в) $A\cap C$; г) $(A\cap B)\cup C$?

Докажите равенства:

35. $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}=A\cap B$.
36. $A\cup(A\cap B)=A$.
37. $A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)$.
38. $(A\cup B)\setminus B=A\setminus B$.
39. $(A\setminus B)\cup B=A\cup B$.
40. $(A\cup B)\cap(C\cup B)=(A\cap C)\cup B$.

При каких условиях справедливы следующие равенства?

41. $A \cup B = A \cap B$.
42. $(A \cup B) \setminus B = A$.
43. $A \cup \bar{A} = A$.
44. $A \cap \bar{A} = A$.

Упростите следующие выражения:

45. $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$.
46. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.
47. $A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (A \cap C))$.
48. $((A \cup B) \cap B) \cup (A \cap (A \cap B))$.

§ 2. Вероятность случайного события

1. Предварительные разъяснения. В быту мы часто пользуемся выражениями «очень вероятно, что к вечеру соберется гроза», «это невероятное событие», «вероятнее всего, мы поедем в дом отдыха», «выигрыш Петрова вероятнее, чем выигрыш Самсонова» и т. п. Этим мы хотим как-то охарактеризовать события, которые могут произойти, но могут и не произойти. В разговоре нередко встречаются выражения типа «у этих игроков шансы на выигрыш равны», «у команды мастеров больше шансов выиграть», «половина шансов за то, что пойдем в кино, и только четверть за то, что попадем на футбол». Здесь уже намечается некоторая числовая оценка, дающая представление, насколько вероятно то или другое событие.

Дать определение вероятности случайного события в общем случае мы не сможем: для этого требуется глубокое знание ряда разделов математики. Но некоторое представление все-таки может быть получено. Мы опять обратимся к энциклопедии:

«Вероятность математическая — числовая характеристика степени возможности появления какого-либо события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз условиях, т. е. характеристика объективно существующей связи между этими условиями и событием».

Разберемся в этом определении и его элементах. Прежде всего, здесь говорится об определенных условиях, в которых появляется событие. Раньше мы говорили короче — сделан опыт. При этом существенно подчеркнуть, что опыт должен быть таким, чтобы его можно было повторить неограниченное число раз (по крайней мере теоретически). В тех же опытах, которые не могут быть повторены неограниченное число раз, говорить о вероятностях событий не имеет смысла.

Поясним теперь смысл выражения «степень возможности появления» события в данном опыте. Что значит, что она характеризуется числом p? Это значит следующее: если опыт повторили n раз, то интересующее нас событие при этом произойдет приблизительно np раз. Эту же мысль можно выразить и иначе: если при n-кратном повторении опыта событие произошло m раз, то частота появления события — число $m/n \approx p$ и точность этого приближенного равенства тем больше, чем больше n. Таким образом, связь, которая существует между опытом и событием и характеризуется числом p — вероятностью события в рассматриваемом опыте,— выявляется только при многократном повторении этого опыта.

Уже отмечалось, что общее определение вероятности случайного события не может быть дано в курсах с недостаточной математической базой. Поэтому при начальном знакомстве с теорией вероятностей рассматриваются частные случаи, в которых понятие вероятности случайного события формулируется просто. Эти случаи называют: «классическое определение» (исторически оно появилось первым) и «геометрические вероятности».

Но прежде чем переходить к ним, необходимо сделать еще одно разъяснение. Вспомним, что в определении теории вероятностей сказано: «...по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий...». Эта формулировка предполагает, что имеются некоторые исходные события, вероятности которых уже известны. Но откуда же берутся вероятности исходных событий? Их дают те конкретные науки, в рамках которых возникла решаемая вероятностная задача. При этом зачастую основную роль играют соображения не математические, а той науки, в рамках которой возникла задача.

Поясним сказанное простейшими примерами. В опыте с бросанием монеты события $Г$ = «выпал герб» и $Ц$ = «выпала цифра», очевидно, равноправны, у них одинаковые шансы произойти в этом опыте — половина шансов за то, что выпадет герб, а половина — за то, что выпадет цифра. Это утверждение основано на том, что монета симметрична, а ее материал однороден. Поэтому естественно ожидать (и это подтверждено многовековой практикой игроков), что при большом числе бросаний приблизительно в половине случаев выпадет герб, т. е. частота появления герба будет приблизительно равна 0,5. Поэтому в опыте с бросанием монеты вероятность появления герба принимается равной 0,5. Из тех же соображений и вероятность выпадения цифры тоже принимается равной 0,5. Это записывают следующим образом:

$$P(Г) = 0{,}5; \quad P(Ц) = 0{,}5.$$

Вы видите, что основную роль здесь играют соображения здравого смысла и конкретные условия опыта — правильность монеты.

Для решения более сложных вероятностных задач вероятности исходных событий должны быть заданы. В каждом конкретном случае они задаются по-своему.

Упражнения.

1. Какие вероятности вы бы выбрали для событий Q_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, в опыте с бросанием игральной кости?

2. Имеется правильная треугольная пирамида, сделанная из однородного материала. На ее гранях помечены точками очки: 1, 2, 3 и 4. Какие вероятности вы бы выбрали для событий H_k = «при бросании на стол пирамида остановилась на грани с k очками»?

3. Бросаются две монеты — медная и серебряная. Какие вероятности вы бы выбрали для событий: A = «выпали оба герба», B = «выпали обе цифры», C = «на медной монете выпал герб, на серебряной — цифра» и H = «на медной монете выпала цифра, на серебряной — герб»?

4. В ящике лежат 7 одинаковых на ощупь шаров. Они имеют номера от 1 до 7. Опыт состоит в том, что из ящика наудачу вынимают шар и записывают его номер. Какие вероятности вы бы выбрали для событий A_k = «вынут шар с номером k», $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$?

5. Опыт состоит в том, что из колоды карт наудачу вынимается одна карта. Какую вероятность вы бы выбрали для события K = «вынута карта красной масти»?

2. Классическое определение вероятности случайного события. В примерах и упражнениях предыдущего пункта рассматривались события, вероятности которых естественно было считать равными по условиям опыта. Такие события называются *равновероят-*

ными. Так, выпадение герба и цифры при бросании монеты суть равновероятные события. При бросании игральной кости события Q_1, Q_2, ..., Q_6 тоже равновероятны. И так далее. Утверждение о равновероятности этих событий вытекало из симметрии условий опыта относительно них. Так, в опыте с бросанием монеты симметрия монеты и однородность ее материала ставят события $Г$ и $Ц$ в равные условия, и потому они равновероятны. Аналогичное положение и с бросанием игральной кости: ее симметрия и однородность материала ставят все шесть событий Q_i в равные условия, и потому они равновероятны.

Выбор равновероятных событий в данном опыте есть форма задания вероятностей исходных событий, о чем говорилось в предыдущем пункте. При указании равновероятных событий основную роль играют конкретные условия рассматриваемого опыта и здравый смысл. Часто помогают соображения симметрии, понятые в широком смысле этого слова: условия проводимого опыта симметричны относительно рассматриваемых событий (как это наблюдается при бросании монеты или игральной кости).

Теперь, когда введено понятие о равновероятности событий, можно дать классическое определение вероятности случайного события.

Определение. Пусть множество исходов опыта состоит из n равновероятных исходов. Если m из них благоприятствуют событию A, то *вероятностью события* A называется число

$$P(A)=m/n. \tag{1}$$

Давая такое определение вероятности события A, мы рассчитываем (в силу равновероятности исходов опыта), что при многократном повторении опыта событие A произойдет приблизительно в m/n части всех опытов. То есть частота появления события A будет приблизительно равна m/n (а именно в этом заключается основная практическая ценность вероятности события). Позднее мы увидим, что этот расчет оправдывается, а данное определение соответствует разъяснениям о вероятности события, данным в предыдущем пункте.

Рассмотрим теперь несколько примеров на вычисление вероятностей случайных событий по формуле (1). В ряде случаев при этом придется пользоваться комбинаторикой (этот материал помещен в приложении).

Пример 1. Какова вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет четное число очков?

В опыте с бросанием игральной кости мы имеем шесть равновероятных исходов — Q_1, Q_2, ..., Q_6. Нас интересует вероятность события $Q_ч$. Ему благоприятствуют три исхода опыта — Q_2, Q_4 и Q_6. Следовательно, $n=6$, $m=3$, а искомая вероятность

$$P(Q_ч)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Бросили две монеты. Какова вероятность того, что выпали два герба?

Сразу напрашиваются три исхода проводимого опыта (здесь опыт состоит в том, что бросили две монеты и посмотрели, что выпало): это события $Г$ = «на обеих монетах выпал герб», $Ц$ = «на обеих монетах выпала цифра» и A = «на одной монете выпал герб, а на другой монете выпала цифра». Эти события попарно несовместны, и в результате опыта одно из них обязательно происходит. Следовательно, это исходы рассматриваемого опыта. Но интуитивно ясно, что они не равновероятны — у события A больше шансов появиться. Чтобы получить в этом опыте равновероятные исходы, мы внесем в этот опыт некоторое дополнение, которое не изменит вероятностной структуры задачи. Именно, возьмем одну монету медную, а другую серебряную. Ясно, что от этого вероятностная структура задачи не изменится. Но это добавление позволит уже выделить в нашем опыте равновероятные исходы. Это будут события $Г$, $Ц$, A_1 = «на серебряной монете выпал герб, а на медной монете выпала цифра» и A_2 = «на серебряной монете выпала цифра, а на медной монете выпал герб». Ясно, что четыре события $Г$, $Ц$, A_1 и A_2 уже равновероятны, поскольку условия опыта относительно них симметричны. Эти события являются также и исходами рассматриваемого опыта. Теперь все подготовлено для того, чтобы можно было обратиться к теории вероятностей (до сих пор мы пользовались условиями задачи для выделения в опыте исходных событий и их вероятностей — здесь это сводилось к выявлению равновероятных исходов опыта). Таким образом, равновероятных исходов опыта 4, т. е. $n=4$. Нас интересует вероятность события $Г$, ему благоприятствует только один исход — $Г$, т. е. $m=1$. Следовательно, искомая вероятность

$$P(Г) = 1/4.$$

Пример 3. Из семи одинаковых билетов один выигрышный. Семь человек поочередно вытягивают по одному билету (не возвращая его). Зависит ли вероятность выигрыша от места в очереди?

Перенумеруем все билеты, начиная с выигрышного. После вытягивания билеты оказываются распределенными между людьми, которые занимали определенное место в очереди. Этим упорядочивается множество из семи билетов — на первом месте оказывается билет, вытянутый человеком, стоявшим в очереди первым; на втором месте оказывается билет, вытянутый человеком, стоявшим в очереди вторым, и так далее. Таким образом, исходом опыта является получение некоторой перестановки из семи билетов; их число $n=7!$. Поскольку билеты вытягиваются наугад, то все эти исходы равновероятны. Нас интересует вероятность события A_k = «выиграл человек, стоявший в очереди на k-м месте». Этому событию благоприятствуют исходы, при которых получаются перестановки, имеющие на k-м месте выигрышный билет, а остальные шесть мест заняты произвольной перестановкой из оставшихся шести невыигрышных билетов; их число $m=6!$. Следовательно,

$$P(A_k) = \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7},$$

т. е. эта вероятность не зависит от места в очереди.

Пример 4. Бросили две игральные кости и подсчитали сумму выпавших очков. Что вероятнее — получить в сумме 7 или 8?

В этом примере опыт состоит в том, что бросается пара игральных костей и берется сумма выпавших очков. Сразу напрашиваются такие исходы этого опыта: «в сумме выпало 2 очка», «в сумме выпало 3 очка» и т. д. до «в сумме выпало 12 очков» (проверьте, что это действительно исходы рассматриваемого опыта). Но это не равновероятные исходы. Действительно, сумма 2 может получиться единственным способом: $2=1+1$, а сумма 4 может получиться двумя способами: $4=1+3$ и $4=2+2$. То есть шансов на то, что в сумме получится 4, больше. Тогда (для выявления равновероятных исходов опыта) попробуем уточнить выбор исходов и рассмотрим такие события: «на одной кости выпало k очков, а на другой кости p», $k,\ p=1, 2, 3, 4, 5, 6$. Но это тоже не равновероятные исходы (проверьте, что это действительно исходы): интуиция подсказывает, что выпадение одинакового числа очков на костях менее вероятно, чем разного числа очков. Чтобы получить равновероятные исходы опыта, внесем в эту задачу дополнительный элемент, который не меняет вероятностную сторону задачи,— окрасим одну кость в красный, а другую — в синий цвет. Ясно, что при этом вероятностная сторона поставленной задачи не изменилась. Но этот элемент (окраска кубиков) позволит нам, наконец, выявить равновероятные исходы рассматриваемого опыта. Это будут следующие события: «на красной кости выпало k очков, а на синей — p очков» $=(k;\ p)$. Поскольку кости отличаются только цветом, то указанные события равновероятны. Кроме того, они образуют множество исходов нашего опыта. Действительно, в результате опыта одно из этих событий обязательно происходит и они попарно несовместны (например, (4; 3) и (4; 5) несовместны потому, что при первом событии на синей кости выпало 3 очка, а при втором событии на синей кости выпадает 5 очков — одновременно это произойти не может). Остается подсчитать число всех исходов $n=36$ (каждое из 6 очков, которые могут выпасть на красной кости, может быть в паре с любым из 6 очков, которые могут выпасть на синей,—всех пар, следовательно, $6^2=36$). Теперь подсчитаем число исходов, благоприятствующих указанным в задаче событиям. Событию $A=$ «сумма выпавших очков равна семи» благоприятствуют следующие 6 исходов: (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3); (5; 2), (6; 1). Таким образом,

$$P(A)=6/36=1/6.$$

Событию $B=$ «сумма выпавших очков равна восьми» благоприятствуют следующие 5 исходов: (2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2). Следовательно,

$$P(B)=5/36.$$

Мы видим, что получить в сумме 7 очков — более вероятное событие, чем получить в сумме 8 очков *).

Пример 5. В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шаров. Из них 12 белых и 8 черных. Наудачу вынимается шар. Какова вероятность того, что он окажется белым?

В этом примере рассматривается следующий опыт: из ящика наудачу вынимают шар и смотрят, какого он цвета. Сразу напрашиваются два исхода этого опыта: события $Ч$ = «вынут черный шар» и $Б$ = «вынут белый шар». Но эти исходы не равновероятны, так как белых шаров больше и шансов вынуть белый шар поэтому больше. Для выявления в этом опыте равновероятных исходов внесем в опыт дополнительный элемент, не нарушающий вероятностной структуры задачи,— перенумеруем номерами все шары: с 1 по 12 — белые и с 13 по 20 — черные. События E_k = «вынут шар с номером k» уже равновероятны, так как все шары на ощупь неотличимы и вынимаются наудачу. Кроме того, эти двадцать событий образуют множество исходов нашего опыта. Следовательно, $n = 20$, а интересующему нас событию $Б$ благоприятствуют первые 12 исходов, т. е. $m = 12$. Следовательно,

$$P(Б) = 12/20 = 0{,}6.$$

Это кажется очевидным, но если задачу немного усложнить, то полученные ответы уже совсем не будут очевидными и для их получения необходимы вычисления.

Пример 6. В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шаров. Из них 12 белых и 8 черных. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба они белые? Какова вероятность того, что они разного цвета?

Опыт здесь состоит в том, что вынимается пара шаров и отмечается их цвет. Как и раньше, для выявления равновероятных исходов этого опыта перенумеруем все шары. События $(k;\ p)$ = «вынутые шары

---

*) Интересно отметить, что этот факт был сначала замечен игроками в кости, а разобранный пример был одним из первых, при теоретическом обсуждении которого начали складываться методы теории вероятностей.

имеют номера k и p» равновероятны, поскольку шары вынимаются наудачу и неотличимы на ощупь. Кроме того, указанные события образуют множество исходов рассматриваемого опыта (объясните — почему?). Подсчитаем число этих исходов. Оно равно числу двухэлементных подмножеств множества, содержащего 20 элементов, т. е. $n = C_{20}^2$. Событию B = «оба шара белые» благоприятствуют исходы, для которых числа k и p изменяются от 1 до 12 и различны, т. е. это число двухэлементных подмножеств множества, содержащего 12 элементов, т. е. $m = C_{12}^2$. Следовательно, ответ на первый вопрос примера получается так:

$$P(B) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 19} = \frac{66}{190} \approx 0{,}35.$$

При решении второй части задачи рассматриваются те же исходы опыта. Событию A = «вынуты шары разного цвета» благоприятствуют исходы, для которых один номер, например k, может быть любым от 1 до 12, а другой номер p может быть любым от 13 до 20. Любое из возможных 12 значений одного номера может комбинироваться с любым из 8 возможных значений второго номера. Следовательно, число исходов, благоприятствующих событию A, есть $m = 12 \cdot 8$ и

$$P(A) = \frac{12 \cdot 8}{C_{20}^2} = \frac{12 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2}{20 \cdot 19} = \frac{96}{190} \approx 0{,}5.$$

Важно подчеркнуть следующее обстоятельство. Из решений приведенных примеров видно, что для выявления равновероятных исходов опыта часто приходится вносить в рассматриваемый опыт дополнительный элемент, который не изменяет вероятностную структуру поставленной задачи. От того, насколько удачно это дополнение сделано, зависит бо́льшая или меньшая сложность решения задачи.

Пример 7. На пяти одинаковых на ощупь карточках написаны буквы: на двух карточках Л, на остальных трех И. Выкладываем наудачу эти карточки подряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово ЛИЛИИ?

Опыт в этой задаче состоит в получении наудачу некоторого «слова» из пяти имеющихся букв. Нас интересует вероятность события C = «получено слово

ЛИЛИИ». Для выявления равновероятных исходов опыта перенумеруем буквы—получим карточки с буквами $Л_1$, $Л_2$, $И_1$, $И_2$, $И_3$. Теперь в результате опыта мы будем получать «слово из нумерованных букв», т. е. события «получено слово $Л_1И_1Л_2И_2И_3$» и «получено слово $Л_2И_3Л_1И_1И_2$» разные, хотя и в том и в другом случае получено слово ЛИЛИИ, т. е. произошло интересующее нас событие C, а выписанные события благоприятствуют событию C. Ясно, что выписанные выше события и все возможные аналогичные образуют множество равновероятных исходов нашего опыта. Число их равно числу перестановок во множестве из пяти элементов, т. е. $n=5!=120$.

Подсчитаем теперь число исходов, благоприятствующих событию C. Из всех возможных «слов» получается слово ЛИЛИИ, если буквы Л попадают на первое и третье место, а остальные места заняты буквами И: $Л_1ИЛ_2ИИ$ или $Л_2ИЛ_1ИИ$. Никаких других возможностей нет. Но буквы И тоже имеют номера и могут располагаться на своих трех местах в любом порядке, образовывать любую перестановку. Число их равно $3!=6$. Следовательно, из каждой отмеченной выше возможности получается 6 исходов, а всего исходов, благоприятствующих событию C, будет 12. Следовательно, $m=12$ и

$$P(C)=12/120=0{,}1.$$

Пример 8. В ящике лежат 15 красных, 9 синих и 6 зеленых шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 синих и 3 красных шара?

В этой задаче опыт состоит в том, что из ящика наудачу вынимают 6 шаров и отмечают, сколько шаров какого цвета. Нас интересует вероятность события A = «вынуты 1 зеленый, 2 синих и 3 красных шара». Для выявления равновероятных исходов перенумеруем все шары: номера красных шаров с 1 по 15, номера синих—с 16 по 24 и номера зеленых—с 25 по 30. При этом дополнении вероятность события A не изменится. Опыт теперь будет состоять в том, что мы вынимаем из ящика 6 шаров и записываем их номера,—получается некоторое подмножество из 6 номеров, выбранных из множества в 30 номеров, например:

$\{1; 3; 15; 21; 23; 30\}$, $\{2; 3; 15; 25; 27; 30\}$ и т. д. Эти события равновероятны и образуют множество исходов нашего опыта. Действительно, в результате опыта вынимается какое-то подмножество из 6 номеров, т. е. одно из указанных событий обязательно происходит. И эти события попарно несовместны, поскольку они определяются разными подмножествами номеров (у выписанных событий в одном есть номер 21, а в другом нет этого номера — следовательно, одновременно эти два события произойти не могут). Число всех этих исходов равно числу шестиэлементных подмножеств у множества, состоящего из 30 элементов, т. е. $n = C_{30}^6$. Событию A благоприятствуют такие подмножества номеров, в которых есть три номера из первых 15 (красные шары), два номера из номеров от 16-го по 24-й (синие шары) и один номер из номеров от 25-го по 30-й (зеленый шар). Так, из выписанных выше подмножеств первое благоприятствует событию A, а второе — нет. Три номера из 15 можно выбрать C_{15}^3 способами (выбор трех красных шаров). Два номера из 9 (т. е. два синих шара из имеющихся 9) можно выбрать C_9^2 способами. Один номер из 6 (т. е. один зеленый шар из имеющихся 6) можно выбрать 6 способами. Следовательно (в силу принципа произведения в комбинаторике), исходов, блогоприятствующих событию A, будет $m = C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1$ и интересующая нас вероятность есть

$$P(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{30}^6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{24}{145} \approx 0{,}17.$$

Упражнения. Являются ли равновероятными следующие события?

1. «Выпал герб» и «выпала цифра» в опыте — бросание монеты.
2. «Выпал герб» и «выпала цифра» в опыте — бросание неправильной (например, погнутой) монеты.
3. «Промах» и «попадание» в опыте — выстрел по цели.
4. Опыт — бросание двух монет; события: A = «выпали два герба», B = «выпали две цифры» и C = «выпали герб и цифра».
5. Опыт — бросание игральной кости; события: A = «выпало не менее трех очков» и B = «выпало не более четырех очков».
6. Опыт — вынимается косточка домино из набора в 28 косточек; события: A = «вынута косточка с числом 6» и B = «вынута косточка с числом пусто».
7. Будут ли события, указанные в упр. 1—6, образовывать множество исходов соответствующего опыта?
8. Приведите пример опыта с тремя исходами.

9. Приведите пример опыта и укажите в нем три попарно несовместных события, не образующие множество исходов этого опыта.

10. Приведите пример опыта и четырех событий в нем, одно из которых обязательно происходит, но чтобы эти четыре события не были множеством исходов вашего опыта.

При бросании игральной кости вычислить вероятности следующих событий:

11. «Выпало два очка».

12. «Выпало пять очков».

13. «Выпало четное число очков».

14. «Выпало простое число очков».

15. «Число выпавших очков кратно трем».

16. Бросили две монеты. Какова вероятность того, что на одной монете выпал герб, а на другой — цифра?

При бросании двух игральных костей вычислить вероятности следующих событий:

17. Сумма выпавших очков равна 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12. Полученные результаты изобразить на координатной плоскости, откладывая по оси абсцисс сумму очков, а по оси ординат — вероятность выпадения этой суммы.

18. Разность выпавших очков равна 0, 1, 2, 3, 4, 5.

19. Сумма выпавших очков больше их произведения.

20. Имеется пять отрезков длины 1, 3, 5, 7 и 9 см. Определить вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков (из этих пяти) можно построить треугольник.

21. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 конгруэнтных кубиков. Определить вероятность того, что наудачу выбранный кубик имеет две окрашенные грани.

22. Какова вероятность того, что в январе наудачу выбранного года окажется пять воскресений?

23. На шести одинаковых карточках написаны буквы *А*, *В*, *К*, *М*, *О*, *С*. Карточки раскладываются наугад в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МОСКВА?

24. Слово АГАВА разрезали на буквы и эти буквы выложили наудачу в ряд. Какова вероятность опять получить это же слово?

25. Слово МОЛНИЯ разрезали на буквы, взяли наудачу четыре буквы и выложили их в ряд. Какова вероятность того, что получилось слово МИЛЯ?

26. В ящике лежит 31 деталь первого сорта и 6 деталей второго сорта. Наудачу вынимают три детали. Чему равна вероятность того, что: а) все три детали первого сорта; б) хотя бы одна из деталей первого сорта?

27. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Наугад берут четыре карточки и выкладывают их в ряд. Какова вероятность того, что получится четное число?

Из полного набора косточек домимо (28 косточек) наудачу вынимается одна. Найти вероятность следующих событий:

28. «На вынутой косточке шесть очков».

29. «На вынутой косточке пять очков или четыре очка».

30. «Сумма вынутых очков равна 7».

31. Замок открывается только при наборе определенного шифра — пятизначного номера, который можно составить из семи цифр:

1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Какова вероятность того, что замок откроется при случайном наборе шифра?

В ящике лежат 12 белых и 8 красных одинаковых на ощупь шаров. Решить следующие задачи:

32. Вынули один шар. Какова вероятность того, что он белый?

33. Вынули один шар. Какова вероятность того, что он красный?

34. Вынули два шара. Какова вероятность того, что они разного цвета?

35. Вынули восемь шаров. Какова вероятность того, что три из них красные?

36. Вынули восемь шаров. Какова вероятность того, что красных шаров вынуто не более трех?

37. В ящике лежат 13 зеленых, 10 красных и 7 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают 8 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 3 зеленых, 2 красных и 3 синих шара?

38. Какова вероятность исходов опыта, если все они равновероятны?

39. В лотерее из 7 билетов 2 выигрышных. По очереди 7 человек вытягивают по билету. Зависит ли вероятность выигрыша от места в очереди?

40. В лотерее k билетов, один из которых выигрышный. По очереди k человек вытягивают по билету. Какова вероятность выигрыша и зависит ли она от места в очереди?

41. В лотерее из 11 билетов выигрышных 3. Поочередно 5 человек вытягивают по билету. Какова вероятность выигрыша?

42. В лотерее из k билетов выигрышных p. Поочередно k человек вытягивают по билету. Какова вероятность выигрыша?

43. В лотерее n билетов, из которых l выигрышных. Найти вероятность того, что из k вынутых билетов выиграет хотя бы один билет.

44. Наудачу взятый телефонный номер состоит из пяти цифр. Как велика вероятность, что в нем: а) все цифры различные; б) все цифры нечетные?

45. Из ящика, в котором находится 31 деталь без дефекта и 6 с дефектами, берут наудачу 3 детали. Чему равна вероятность следующих событий: а) все три детали без дефекта; б) по крайней мере одна деталь без дефекта?

46. На отдельных карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Все девять карточек тщательно перемешаны, после чего наугад вынимают четыре из них и раскладывают в ряд друг за другом. Какова вероятность получить при этом: а) четное число; б) число 1234?

47. Найдите вероятность достоверного и невозможного событий.

48. Докажите, что вероятность любого события удовлетворяет неравенству $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

3. Теоремы сложения. Теперь перейдем к теоремам, при помощи которых по вероятностям одних случайных событий вычисляются вероятности других случайных событий. Простейшие из этих теорем объединяются в группу, носящую название *теоремы сложения*.

Теорема 1. *Если* $A \cap B = U$, *то* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Поскольку $A \cap B = U$ означает, что события A и B несовместны, то теорему можно сформулировать и так: для несовместных событий A и B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Доказательство. Пусть рассматриваемый опыт имеет n равновероятных исходов. Если m из них благоприятствуют событию A, то $P(A) = m/n$. Если событию B благоприятствуют k исходов, то $P(B) = k/n$. Поскольку события A и B несовместны ($A \cap B = U$), то нет исходов, благоприятствующих одновременно и событию A и событию B. Следовательно, событию $A \cup B$ благоприятствуют $m+k$ исходов (m исходов, благоприятствующих событию A, и k исходов, благоприятствующих событию B), и потому

$$P(A \cup B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

Эта теорема доказана нами для классического случая. Оказывается, что это одно из основных свойств вероятности случайного события и в самом общем случае. Приведем основные свойства вероятности случайного события (они принимаются в качестве аксиом):

1. $P(A) \geqslant 0$ для любого события A.
2. $P(E) = 1$ для достоверного события E.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, если A и B несовместны.

Пример 1. Зачет по стрельбе курсант сдаст, если получит оценку не ниже 4. Какова вероятность сдачи зачета, если известно, что курсант получает за стрельбу 5 с вероятностью 0,3 и 4 с вероятностью 0,6?

Здесь опыт состоит в том, что проведены стрельбы и по ним курсант получил оценку. В этом опыте события A = «по стрельбе курсант получил оценку 5» и B = «по стрельбе курсант получил оценку 4» несовместны. Поскольку нас интересует событие «зачет сдан» $= A \cup B$, то по теореме 1

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}3 + 0{,}6 = 0{,}9.$$

Может возникнуть вопрос: откуда известны вероятности получения 5 или 4 за стрельбу? Ответ: из опыта стрельб, проводившихся в году.

Теорема 1 обобщается на любое число попарно несовместных событий.

Теорема 2. *Если события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ попарно несовместны, то*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)=\sum_{i=1}^{k} P(A_i).$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $k=2$ это есть теорема 1 и потому утверждение верно. Предположим теперь, что утверждение верно при $k=s$, и докажем, что тогда оно верно и при $k=s+1$. Так как

$$\bigcup_{i=1}^{s+1} A_i=\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right)\cup A_{s+1}$$

в силу сочетательного закона в алгебре событий и

$$\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right)\cap A_{s+1}=\bigcup_{i=1}^{s} (A_i\cap A_{s+1})=\cup U=U$$

в силу распределительного закона в алгебре событий, то по теореме 1

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{s+1} A_i\right)=P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right)\cup A_{s+1}\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right)+$$
$$+P(A_{s+1})=\sum_{i=1}^{s} P(A_i)+P(A_{s+1})=\sum_{i=1}^{s+1} P(A_i).$$

В силу принципа математической индукции отсюда следует, что теорема 2 верна для любого натурального $k\geqslant 2$.

Пример 2. В цехе работает несколько станков. Вероятность того, что за смену потребует наладки один станок, равна 0,2. Вероятность того, что за смену потребуют наладки два станка, равна 0,13. Вероятность того, что за смену потребуют наладки больше двух станков, равна 0,07. Какова вероятность того, что за смену придется производить наладку станков?

В этом примере опыт состоит в том, что после окончания смены отмечается, сколько станков потребовало наладки. В этом опыте события $A=$«за смену потребовал наладки один станок», $B=$«за смену потребовали наладки два станка» и C = «за смену потребовали наладки более двух станков» несовместны. Нас же интересует вероятность события $A \cup B \cup C$. В силу теоремы 2

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \\ = 0{,}2 + 0{,}13 + 0{,}07 = 0{,}4.$$

Установим теперь важную связь между вероятностями противоположных событий.

Теорема 3. *Для события A верно равенство*

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

Доказательство. Так как $A \cap \bar{A} = U$ и $A \cup \bar{A} = E$, а $P(E) = 1$, то $1 = P(E) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, откуда следует, что $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Пример 3. Наудачу берется число из чисел от 100 до 999. Какова вероятность того, что хотя бы две его цифры совпадают?

Здесь опыт состоит в том, что наудачу берется натуральное число из чисел от 100 до 999 и смотрят, есть ли в нем одинаковые цифры. События «взяли наудачу число p» образуют множество исходов этого опыта. Очевидно, что эти исходы равновероятны. Число исходов $n = 900$. Нас интересует событие A = «у выбранного числа совпадают хотя бы две цифры». Но проще подсчитать вероятность противоположного события $\bar{A}$ = «у выбранного числа все цифры различны». Каждое такое число есть упорядоченное подмножество из трех цифр множества из десяти цифр, у которого первый элемент не 0, т. е. $m = A_{10}^3 = 9 \cdot 9 \cdot 8$ и

$$P(\bar{A}) = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8}{900} = 0{,}72.$$

Интересующая же нас вероятность есть $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}28$.

Выведем еще формулу для вероятности объединения двух событий в общем случае (не обязательно несовместных).

Теорема 4. *Для любых событий A и B верно равенство*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Доказательство. Сначала докажем, что

$$P(H \setminus M) = P(H) - P(M), \text{ если } M \subset H. \qquad (1)$$

Действительно, в этом случае $H = M \cup (H \setminus M)$. А так как

$$M \cap (H \setminus M) = (M \cap H) \setminus (M \cap M) = M \setminus M = U$$

(т. е. события M и $(H \setminus M)$ несовместны), то по теореме 1

$$P(H) = P(M \cup (H \setminus M)) = P(M) + P(H \setminus M),$$

откуда, перенося $P(M)$ влево с обратным знаком, получаем (1).

Теперь докажем формулу, приведенную в теореме. Так как

$$A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$$

и события A и $(B \setminus (A \cap B))$ несовместны (см. упр. 18 и 19 к п. 2 § 1), то по теореме 1

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (B \cap A)) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(поскольку $A \cap B \subset B$ и, следовательно, можно применять формулу (1)).

Очень важно обратить внимание на то, что только теорема 1 доказывалась с использованием классического определения вероятности случайного события. Все же остальные теоремы мы доказывали, опираясь только на теорему 1. Поскольку теорема 1 (как это отмечалось) имеет место в любой вероятностной ситуации, то и все доказанные в этом пункте теоремы (они носят общее название — теоремы сложения) тоже сохраняются в любой вероятностной ситуации.

Упражнения.

1. Стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,05, в девятку — с вероятностью 0,2, в восьмерку — с вероятностью 0,6. Сделан один выстрел. Какова вероятность следующих событий: $A =$ «выбито не менее восьми очков», $B =$ «выбито более восьми очков»?

2. Вывести формулу для $P(A \cup B \cup C)$ в общем случае.

3. В ящике лежат 8 белых и 12 красных одинаковых на ощупь шаров. Наудачу вынимают три шара. Какова вероятность того, что хотя бы один из них белый?

4. В условиях упр. 3 вынуто 6 шаров. Какова вероятность того, что среди них не более одного белого шара?

5. В условиях упр. 3 вынуто 5 шаров. Какова вероятность того, что среди них не менее двух белых шаров?

6. В День физкультурника Сизов пошел на стадион. Можно было купить билет на футбол с вероятностью 0,3, или купить билет на баскетбол с вероятностью 0,4, или купить билет на волейбол с вероятностью 0,2. Какова вероятность того, что Сизов попал на соревнование? Какова вероятность того, что Сизов попал на соревнование по баскетболу или волейболу?

7. В условиях упр. 3 вынули два шара. Какова вероятность того, что они одного цвета?

8. В ящике лежат 8 красных, 10 зеленых и 12 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают три шара. Какова вероятность того, что хотя бы два из них одного цвета?

9. В мастерской работает три станка. За смену первый станок может потребовать наладки с вероятностью 0,15. Для второго станка эта вероятность равна 0,1 и для третьего станка — 0,12. Считая, что станки не могут одновременно потребовать наладки, найти вероятность того, что за смену хотя бы один станок потребует наладки.

10. Известны вероятности $P(A)$ и $P(A \cap B)$; вычислите $P(A \cap \bar{B})$.

4. Геометрические вероятности. В предыдущих пунктах рассматривались опыты с конечным множеством исходов. Но не всякая реальная задача может быть сведена к такой схеме. Например, отрезок длиною в метр разламывается на три части. Какова вероятность того, что из получившихся трех отрезков можно построить треугольник? Теоретически длины получившихся отрезков могут быть любыми неотрицательными числами, сумма которых равна 1. Таким образом, мы здесь имеем дело с опытом, у которого бесконечное множество исходов, и это существенно.

При решении подобного рода задач часто большую роль играет геометрическая модель. В приведенном примере модель состоит в том, что на отрезок $[0; 1]$ числовой прямой наудачу бросаются две точки (они разбивают этот отрезок на три части, и нас интересует, можно ли из полученных отрезков сложить треугольник). Остается только установить смысл выражения «бросаются наудачу точки».

Начнем с одной точки. Что подсказывает нам интуиция о вероятностях событий «точка попала на правую половину отрезка» и «точка попала на левую половину отрезка»? Поскольку точка бросается наудачу, то естественно считать эти события равновероятными — вероятность каждого 0,5 (поскольку это противоположные события). Ну, а если мы разделим отрезок на 10 конгруэнтных отрезков и рассмотрим события «точка попала на левый отрезок», «точка попала на второй слева отрезок», ..., «точка попала на правый отрезок»? Это опять равновероятные события. А вероятность каждого из них придется считать по 0,1, поскольку это множество исходов нашего опыта. Поставим теперь вопрос: «какова вероятность попадания брошенной точки на отрезок [0,3; 0,7]?» Поскольку этому событию благоприятствуют четыре из указанных выше исходов, то искомая вероятность равна 0,4, т. е. длине отмеченного отрезка. В общем случае смысл выражения «точка брошена наудачу на отрезок длины 1» состоит в том, что вероятность попадания точки на часть этого отрезка длины l равна этому числу l.

Аналогично понимается смысл выражения «точка брошена наудачу в квадрат со стороной 1 (или в прямоугольник площади 1)» — это значит, что вероятность попадания точки на любую часть этого квадрата (прямоугольника) равна площади этой части.

Поясним сказанное решением задачи о треугольнике, поставленной в начале этого пункта.

Пример 1. На отрезок длины 1 бросаются наудачу две точки. Они разбивают отрезок на три части. Какова вероятность того, что из полученных отрезков можно построить треугольник?

Рассматриваем заданный отрезок как отрезок [0; 1] числовой прямой. Тогда наудачу брошенные точ-

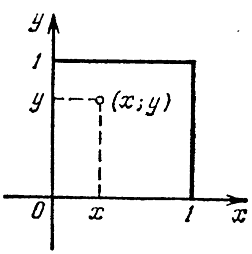


Рис. 14.

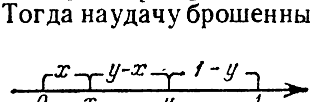


Рис. 15.

ки имеют координаты — числа x и y из отрезка [0; 1]. Но любая пара чисел может рассматриваться как координаты точки на плоскости (рис. 14). Поскольку $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$, то эти точки $(x; y)$ наудачу брошены в квадрат со стороной 1. Посмотрим теперь, какую фигуру образуют точки, координаты которых удовлетворяют условию примера. Для того чтобы из трех отрезков можно было построить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство треугольника для длин его сторон. При $x \leqslant y$ (рис. 15) мы получаем неравенства (длина стороны меньше суммы длин двух других сторон)

$$x < (y-x)+(1-y), \quad y-x < x+(1-y),$$
$$1-y < x+(y-x),$$

что после преобразований дает систему неравенств

$$x < 0{,}5, \quad y < x+0{,}5, \quad 0{,}5 < y, \quad x \leqslant y.$$

Эта система неравенств выделяет на плоскости треугольник (рис. 16, верхний треугольник). При $x > y$ (рис. 17) получается система неравенств

$$x > 0{,}5, \quad y < 0{,}5, \quad y > x-0{,}5, \quad x > y,$$

выделяющая на плоскости второй (нижний) треугольник (рис. 16). Площадь заштрихованной на рис. 16 фигуры равна 0,25. Следовательно, вероятность получить треугольник равна 0,25.

В более сложных случаях может оказаться, что при геометрической интерпретации получится такая картина:

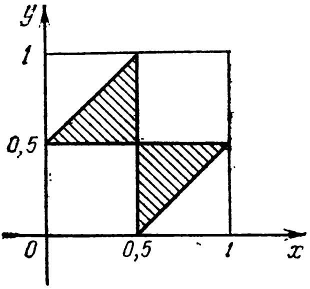


Рис. 16.

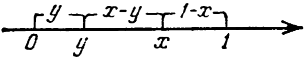


Рис. 17.

имеется фигура площади s, и на нее наудачу бросается точка. Тогда вероятность попадания точки на часть фигуры, имеющую площадь p, считается равной p/s.

Пример 2 (задача Бюффона). На плоскости (бесконечной) проведено семейство параллельных прямых (тоже бесконечное). Расстояние между соседними прямыми равно l. На эту плоскость бросается наудачу отрезок длины l. Какова вероятность того, что отрезок пересекается хотя бы с одной из прямых семейства?

Расстояние от верхнего конца отрезка до ближайшей снизу прямой обозначим через y (рис. 18). Угол между отрезком и лучом, параллельным прямым семейства, начало которого совпадает с верхним концом отрезка, обозначим через x. Ясно, что $0 < y \leqslant l$ и $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Для того чтобы отрезок пересекал хотя бы одну из прямых семейства, необходимо и достаточно,

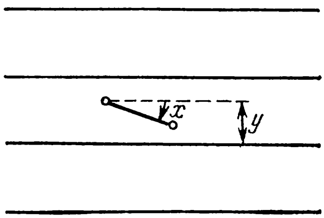


Рис. 18.

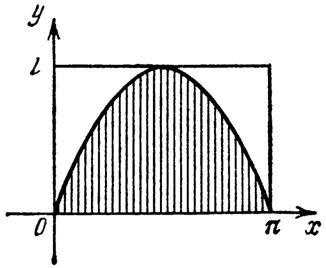


Рис. 19.

чтобы $y = l$ или $y \leqslant l \sin x$. Выражение «отрезок брошен наудачу» будем понимать так: точка $(x; y)$ наудачу брошена на прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant l$ (рис. 19). Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \leqslant l \sin x$, образуют фигуру, заштрихованную на рис. 19. Площадь этой фигуры, деленная на площадь всего прямоугольника, и будет равна искомой вероятности (случай $y = l$ дает отрезок, площадь которого равна нулю). Площадь прямоугольника есть $s = \pi l$. Площадь заштрихованной фигуры

$$p = \int_0^\pi l \sin x \, dx = -l \cos x \Big|_0^\pi = 2l.$$

Следовательно, искомая вероятность есть

$$P = \frac{p}{s} = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}.$$

Упражнения. Докажите, что геометрические вероятности обладают следующими основными свойствами вероятности:

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ для любого события A.
2. $P(E) = 1$, $P(U) = 0$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, если $A \cap B = U$.

4. Двое договорились встретиться на следующих условиях: в указанное место каждый из них приходит в любой момент времени между 13.00 и 14.00; придя, ожидает не более получаса и уходит не позднее 14.00. Какова вероятность того, что встреча состоится?

5. Противотанковые мины поставлены на прямой через 15 м. Танк, шириной в 3 м, идет перпендикулярно этой прямой. Какова вероятность, что он подорвется?

6. На окружности радиуса R зафиксирована точка A. Какова вероятность того, что случайно выбранная точка на окружности отстоит от точки A меньше чем на R?

7. В окружность наудачу вписывается треугольник. Какова вероятность того, что он остроугольный?

8. В окружность вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка эта попадет в квадрат?

9. В окружность вписан правильный треугольник. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что эта точка попадает в треугольник?

10. В окружность наудачу вписывается треугольник. Какова вероятность того, что он прямоугольный?

11. В окружность наудачу вписывается треугольник. Какова вероятность того, что он равнобедренный?

12. Как изменится вероятность встречи в упр. 4, если срок ожидания равен 20 мин?

13. В шар вписан куб. Точка наудачу бросается в шар. Какова вероятность того, что точка попадет в куб?

14. В шар вписана правильная треугольная пирамида. Точка наудачу бросается в шар. Какова вероятность попадания точки в пирамиду?

15. У квадратного трехчлена x^2+px+q коэффициенты p и q выбраны наудачу из отрезка $[-1;\ 1]$. Какова вероятность того, что квадратный трехчлен имеет действительные корни?

§ 3. Независимость случайных событий и их условные вероятности

1. Независимость случайных событий. У каждого из нас есть интуитивное представление о независимости событий. Например, если мы бросаем две монеты, то выпадение герба или цифры на одной монете не зависит от того, что выпало на другой монете. Но в более сложных случаях уже могут возникать разногласия (одни будут считать события A и B независимыми, а другие — зависимыми). В теории же вероятностей (поскольку это есть математическая наука) должно быть дано четкое определение, пригодное для вычислений (так как по вероятностям одних случайных событий вычисляются вероятности других случайных событий, каким-либо образом связанных с первыми).

Определение. Два события A и B называются *независимыми*, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример 1. Два охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по зайцу. Заяц убит, если попали оба. Какова вероятность того, что заяц убит, если первый охотник попадает с вероятностью 0,8, а второй — с вероятностью 0,75?

Рассмотрим события A = «в зайца попал первый охотник» и B = «в зайца попал второй охотник». В условиях задачи сказано, что это независимые события и что $P(A) = 0{,}8$ и $P(B) = 0{,}75$. Нас интересует событие «заяц убит» $= A \cap B$. В силу независимости событий

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}75 = 0{,}6.$$

Как видите, пользоваться этим определением при вычислениях очень просто. Постараемся теперь понять, каким образом наше интуитивное представление о независимости событий может быть связано с этим определением.

Здравый смысл нам подсказывает, что если мы имеем два независимых опыта (т. е. условия одного опыта не влияют на те условия, в которых проводится другой опыт), то и события, происходящие в одном опыте, не зависят от событий, происходящих в другом опыте. Проследим сначала на самом простом примере за тем, что дает это соображение.

Пример 2. Бросили монету и игральную кость. Какова вероятность того, что на монете выпадет герб и на кости — число очков, кратное трем?

Опыт здесь состоит в том, что брошены монета и игральная кость и мы смотрим, что выпало на монете и сколько очков выпало на игральной кости. Нас интересуют события $Г$ = «на монете выпал герб» и H = «число очков, выпавших на игральной кости, кратно трем». Интуиция подсказывает, что эти события независимы. Посмотрим, что даст подсчет.

В проведенном опыте события $Г \cap Q_k$ и $Ц \cap Q_k$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, равновероятны (поскольку условия опыта симметричны относительно них) и образуют множество исходов рассматриваемого опыта (они попарно несовместны, и в результате опыта одно из них обязательно происходит). Число их $n=12$. Шесть из них благоприятствуют событию $Г$ — это исходы $Г \cap Q_k$, $k=1$, 2, 3, 4, 5, 6. Следовательно, в проводимом опыте

$$P(Г)=0{,}5.$$

Событию H благоприятствуют четыре исхода: $Г \cap Q_k$ и $Ц \cap Q_k$, $k=3$, 6. Следовательно, в проводимом опыте

$$P(H)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

Пересечению $Г \cap H$ благоприятствуют два исхода: $Г \cap Q_3$ и $Г \cap Q_6$. Следовательно, в проводимом опыте

$$P(Г \cap H)=\frac{2}{12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=P(Г)\cdot P(H).$$

Мы видим, что в этом примере наше интуитивное представление о независимости событий согласуется с определением независимости событий.

Проведем теперь рассуждение в общем случае (в рамках классического определения вероятности случайного события).

Пример 3. Пусть имеются два независимых опыта S и s. В опыте S может произойти событие A, в опыте s — событие B. Как связаны $P(A)$, $P(B)$ и $P(A \cap B)$?

Здесь рассматривается сложный опыт σ, состоящий в том, что произведены одновременно независимые опыты S и s (т. е. условия проведения опыта S не влияют на условия проведения опыта s, и наоборот). Пусть E_1, E_2, ..., E_n — множество исходов опыта S, а $e_1, e_2, \ldots$ $\ldots, e_k$ — множество исходов опыта s. В результате сложного опыта σ обязательно происходит одно из событий $\omega_{ij}=E_i \cap e_j$, $i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, k$ (поскольку в результате опыта S обязательно происходит одно из событий E_i, а в результате опыта s обязательно происходит одно из событий e_j). События ω_{ij} попарно несовместны (поскольку попарно несовместны E_i и попарно несовместны e_j). Например, ω_{15} и ω_{17} несовместны, так как

$$\omega_{15} \cap \omega_{17}=(E_1 \cap e_5) \cap (E_1 \cap e_7)=$$
$$=(E_1 \cap E_1) \cap (e_5 \cap e_7)=E_1 \cap U=U.$$

В общем случае доказательство аналогично. Следовательно, события ω_{ij}, $i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, k$, образуют множество исходов опыта σ. Их число kn. Они равновероятны, поскольку равновероятны E_i и равновероятны e_j (и потому условия опыта σ симметричны относительно событий ω_{ij}). Таким образом, пользуясь равновероятными исходами ω_{ij}, мы теперь можем вычислять вероятности событий в сложном опыте σ.

Будем для простоты считать, что событию A благоприятствуют исходы $E_1, E_2, \ldots, E_m$ (таким образом занумерованы исходы опыта S). Тогда в опыте S вероятность события A будет

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

В сложном опыте σ событию A будут благоприятствовать исходы $\omega_{ij}=E_i \cap e_j$, $i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, k$; их число km. Следовательно, вероятность события A в сложном опыте σ равна

$$P(A)=\frac{km}{kn}=\frac{m}{n}.$$

Очень важный факт — вероятность события A не изменилась! В этом, собственно говоря, и состоит интуитивное представление о независимости опытов (и событий): при составлении сложного опыта из независимых опытов вероятности событий не меняются.

Пусть событию B благоприятствуют исходы $e_1, e_2, \ldots$ $\ldots, e_l$. Тогда вероятность события B и в опыте s и в опыте σ (как это было выше доказано для события A) есть

$$P(B)=\frac{l}{k}.$$

Событию $A \cap B$ тогда в опыте σ благоприятствуют исходы $\omega_{ij}=E_i \cap e_j$, $i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, l$; их число ml, и потому

$$P(A \cap B)=\frac{ml}{nk}=\frac{m}{n}\cdot\frac{l}{k}=P(A)\cdot P(B).$$

Мы видим, что и в общем случае (для классического определения вероятности события) интуитивное представление о независимости событий и его определение согласованы.

Рассмотрим теперь примеры вычисления вероятностей событий с использованием понятия независимости событий.

Пример 4. События A и B независимы. Покажем, что события $\bar{A}$ и B тоже независимы.

Поскольку $\bar{A} \cap B = (E - A) \cap B = B - (A \cap B)$ и $A \cap B \subset B$, то

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B - (A \cap B)) = \\ = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) = \\ = P(B) \cdot (1 - P(A)) = P(B) \cdot P(\bar{A}),$$

так как события A и B независимы.

Этот факт тоже согласуется с интуицией. Из него также вытекает, что из независимости событий A и B следует как независимость событий A и $\bar{B}$, так и независимость событий $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Пример 5. Два охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по зайцу. Заяц подстрелен, если попал хотя бы один из охотников. Какова вероятность того, что заяц подстрелен, если вероятность попадания первого охотника равна 0,8, а второго — 0,75?

Рассмотрим события: A = «попал первый охотник» и B = «попал второй охотник». По условию задачи $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}75$ и события эти независимы. Нас интересует вероятность хотя бы одного попадания, т. е. события $A \cup B$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \\ = 0{,}8 + 0{,}75 - 0{,}8 \cdot 0{,}75 = 0{,}95.$$

Этот результат тоже согласован со здравым смыслом (и это всегда очень важно подчеркнуть при изучении любой теории): чем больше охотников, тем больше вероятность подстрелить.

Можно рассматривать и несколько событий и определить понятие их независимости.

Определение. События A, B, C, ... называются *независимыми* (или независимыми в совокупности), если вероятность пересечения равна произведению вероятностей для любого подмножества указанных событий.

Пример 6. Четыре охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по зайцу. Заяц подстрелен, если в него попал хотя бы один охотник. Какова вероятность того, что заяц подстрелен, если вероятность попадания для каждого охотника равна 2/3?

Перенумеруем охотников и рассмотрим события A_k = «попадание k-го охотника», $k=1, 2, 3, 4$. Эти события по условию задачи независимы, и $P(A_k)=2/3$ при любом k. Нас интересует вероятность события «заяц подстрелен» $= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}) =$$
$$= 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) =$$
$$= 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) =$$
$$= 1 - (1/3)^4 = 1 - (1/81) \approx 0{,}9877.$$

Здесь, так же как и для двух независимых событий, мы воспользовались тем, что при замене одного из событий противоположным независимость событий не нарушается (докажите это самостоятельно, используя пример 4).

Примененный здесь прием перехода к противоположным событиям весьма полезен при вычислении вероятностей объединения независимых событий.

Пример 7. Событие A может произойти в опыте с вероятностью p. Опыт повторили независимым образом n раз. Какова вероятность того, что при этом событие A произойдет хотя бы один раз?

Рассмотрим события A_k = «событие A произошло при k-м повторении опыта», $k=1, 2, \ldots, n$. То, что опыт повторили независимым образом, означает, что n событий A_k независимы. По условию задачи $P(A_k)=p$ для всех k и $P(\overline{A}_k)=1-p=q$. Нас интересует вероятность события «опыт повторили независимым образом n раз, и при этом событие A произошло хотя бы один раз» $= \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k\right) =$$
$$= 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \ldots P(\overline{A}_n) = 1 - q^n$$

в силу независимости событий (и, следовательно, независимости противоположных им событий).

Интересно отметить, что при $n \to \infty$ эта вероятность имеет пределом 1 (поскольку $0 < q < 1$), т. е. при достаточно большом числе повторений опыта событие A почти наверняка (т. е. с вероятностью, сколь угодно близкой к 1) хотя бы один раз произойдет. Про события, которые происходят почти наверняка, принято говорить, что они практически достоверны.

В заключение этого пункта подчеркнем, что из попарной независимости событий A, B, C, ... не следует их независимость. Это иллюстрируется следующим примером.

Пример 8. Три грани правильной треугольной пирамиды, сделанной из однородного материала, окрашены в красный, зеленый и синий цвета, а четвертая грань разбита на три треугольника, которые также окрашены в красный, синий и зеленый цвета. Опыт состоит в следующем: пирамиду бросают на стол и смотрят, какой цвет присутствует на грани, на которую упала пирамида, т. е. какой цвет выпал.

В этом опыте возможны следующие события: $К =$ = «выпал красный цвет» (оно происходит, если пирамида упала на первую или на четвертую грань), $З =$ «выпал зеленый цвет» (оно происходит, когда пирамида падает на вторую или на четвертую грань) и $С =$ «выпал синий цвет» (оно происходит, когда пирамида падает на третью или четвертую грань).

Равновероятными исходами этого опыта будут события $A_k =$ «пирамида падает на k-ю грань». Событию $К$ благоприятствуют исходы A_1 и A_4; следовательно,

$$P(К) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Событию $З$ благоприятствуют исходы A_2 и A_4; следовательно, $P(З) = 1/2$. Событию $С$ благоприятствуют также два исхода: A_3 и A_4; следовательно, и $P(С) = 1/2$.

Подсчитаем теперь вероятности попарных пересечений этих событий. Событиям $К \cap З$, $К \cap С$ и $З \cap С$ благоприятствует только один исход A_4. Следовательно,

$$P(К \cap З) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(К) \cdot P(З).$$

Аналогично подсчитывается, что

$$P(K \cap C) = P(K) \cdot P(C), \quad P(З \cap C) = P(З) \cdot P(C).$$

Таким образом, события K, $З$ и C попарно независимы. Но они не являются независимыми, поскольку их пересечению благоприятствует только один исход A_4, и потому $P(K \cap З \cap C) = 1/4$, т. е.

$$P(K \cap З \cap C) \neq P(K) \cdot P(З) \cdot P(C) = 1/8.$$

Упражнения.

1. Бросили монету и игральную кость. Покажите, что события «выпал герб» и «выпало четное число очков» независимы.

2. Из полного набора костей домино вынимается косточка, и одновременно бросается игральная кость. Докажите, что события «число очков на косточке домино кратно трем (хотя бы одно)» и «на игральной кости выпало простое число очков» независимы.

3. Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок проработает смену без наладки, равна 0,9, а второй — 0,8. Какова вероятность того, что

а) оба станка проработают смену без наладки;

б) оба станка за смену потребуют наладки?

4. События A и B независимы. Докажите, что независимы события $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

5. События A, B, C независимы. Докажите, что независимы тройки событий: а) $\bar{A}$, B, C; б) $\bar{A}$, $\bar{B}$, C; в) $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ и т. д.

6. События A и B независимы. Найдите двучленную формулу для $P(A \cup B)$.

7. События A, B и C независимы. Найдите формулу для $P(A \cup B \cup C)$.

8. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы. Выпишите формулу для вероятности их объединения.

9. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,8, для второго — 0,75, для третьего — 0,7. Какова вероятность хотя бы одного попадания?

10. Какова вероятность одного попадания в условиях упр. 9?

11. Какова вероятность двух попаданий в условиях упр. 9?

12. Какова вероятность трех попаданий в условиях упр. 9?

13. Какова в условиях упр. 9 вероятность того, что три стрелка промахнулись?

14. Деталь последовательно обрабатывается четырьмя рабочими независимо друг от друга. Вероятность получения брака каждым рабочим равна 0,01. Какова вероятность выпуска детали без брака?

15. Деталь последовательно обрабатывается k рабочими. Вероятность получения брака для каждого рабочего равна p. Какова вероятность выпуска детали без брака, если рабочие ведут обработку независимо друг от друга?

16. Могут ли два несовместных события быть независимыми?

17. В мастерской работают три станка. За смену первый станок может потребовать наладки с вероятностью 0,15 (и после

этого до конца смены ему уже наладки не потребуется). Для второго станка эта вероятность равна 0,1, а для третьего — 0,12. Считая, что станки требуют наладки независимо друг от друга, найти вероятность того, что хотя бы один станок за смену потребует наладки.

18. Прибор, работающий в течение суток, состоит из трех узлов, каждый из которых, независимо от других, может за это время выйти из строя. Неисправность хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. Вероятность безотказной работы в течение суток первого узла равна 0,9, второго — 0,95, третьего — 0,85. Найти вероятность того, что в течение суток прибор будет работать безотказно.

19. При изготовлении детали заготовка должна пройти через четыре операции. Предполагая, что появление брака на отдельных операциях суть независимые события, найти вероятность изготовления стандартной детали, если вероятность брака на первой операции равна 0,02, на второй — 0,01, на третьей — 0,02, на четвертой — 0,03.

20. Вы забыли последнюю цифру номера телефона и набираете ее наудачу. Определите вероятность того, что вам придется звонить не более чем в три места. Как изменится вероятность, если известно, что последняя цифра нечетная?

21. Завод изготовляет изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе имеются три контролера; изделие осматривается только одним контролером и попадает на контроль к первому, второму или третьему с равной вероятностью. Вероятность обнаружения дефекта (если он имеется) для k-го контролера равна p_k ($k=1, 2, 3$). Если изделие не было забраковано в цехе, то оно попадает в ОТК завода, где дефект (если он имеется) обнаруживается с вероятностью p_0.

Определите вероятность следующих событий:

A = «изделие будет забраковано»,
B = «изделие будет забраковано в цехе»,
C = «изделие будет забраковано в ОТК завода».

22. Вычислительная машина состоит из n блоков. Надежность (вероятность безотказной работы) в течение времени T k-го блока равна p_k ($k=1, 2, \ldots, n$). Блоки отказывают независимо друг от друга. При отказе любого блока отказывает машина. Найдите вероятность того, что машина откажет за время T.

2. Условная вероятность случайного события. В ряде случаев возникает вопрос: что можно сказать о вероятности события A, если известно, что произошло событие B?

Самые простые случаи ясны. Так, если события A и B несовместны, то ясно, что событие A произойти не может. В этой ситуации событие A играет роль невозможного события — его вероятность равна нулю. Другой простой случай — $B \subset A$. Здесь ясно, что событие A тоже произошло, т. е. в этой ситуации событие A

играет роль достоверного события — его вероятность равна единице.

А как охарактеризовать промежуточный случай (рис. 20)? Для этой цели служит понятие условной вероятности события A при условии, что произошло событие B.

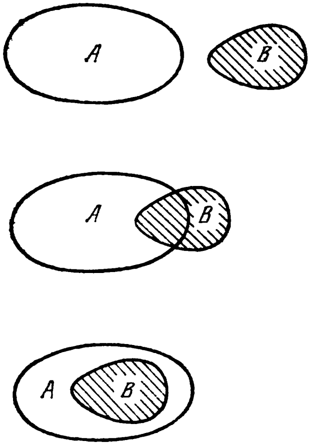


Рис. 20.

Определение. *Условной вероятностью* события A при условии, что произошло событие B, $P(B) \neq 0$, называется число

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Это определение вполне согласовано с приведенными выше предварительными соображениями. Если события A и B несовместны, то $A \cap B = U$, $P(A \cap B) = 0$ и $P(A \mid B) = 0$. Если $B \subset A$, то $A \cap B = B$, $P(A \cap B) = P(B)$ и $P(A \mid B) = 1$.

Для вычисления вероятности события A при условии, что произошло событие B, полезна следующая теорема.

Теорема 1 (о вычислении условной вероятности). *Если событию B благоприятствуют m ($m > 0$) равновероятных исходов опыта и k из них благоприятствуют событию A, то*

$$P(A \mid B) = k/m.$$

Доказательство. Пусть в рассматриваемом опыте n равновероятных исходов. По условию теоремы $P(B) = m/n$ и $P(A \cap B) = k/n$ (событию $A \cap B$ благоприятствуют исходы опыта, которые благоприятствуют и событию A и событию B, а в условии теоремы сказано, что таких исходов k). Тогда по определению условной вероятности

$$P(A \mid B) = \frac{k/n}{m/n} = \frac{k}{m}.$$

Пример 1. Бросили игральную кость. Какова вероятность выпадения простого числа очков, если известно, что число выпавших очков четно?

Нас интересует условная вероятность $P(Q_{пр} | Q_ч)$. Событию $Q_ч$ благоприятствуют три равновероятных исхода опыта: Q_2, Q_4 и Q_6. Из них только исход Q_2 благоприятствует событию $Q_{пр}$. Следовательно,

$$P(Q_{пр} | Q_ч) = 1/3.$$

Чтобы подчеркнуть отличие $P(A|B)$ от $P(A)$, число $P(A)$ часто называют *безусловной вероятностью*. Так, безусловная вероятность выпадения простого числа очков равна $1/2$, а условная вероятность этого же события (при условии, что число выпавших очков четно) равна $1/3$. Легко подсчитать, что условная вероятность того же события $Q_{пр}$ при условии $Q_н$ равна $2/3$. Таким образом, условная вероятность события, вообще говоря, меняется с изменением условия и отлична от безусловной вероятности этого события.

Следующая теорема с другой стороны поясняет целесообразность введенного определения независимости событий A и B — то, что произошло событие B, никакой информации о событии A не сообщает.

Теорема 2. *Для независимых событий A и B справедливо равенство* $P(A|B) = P(A)$.

Доказательство. Поскольку события A и B независимы, то $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, и потому

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Пример 2. Из колоды карт в 32 листа наудачу вынута одна карта. Какова вероятность того, что это дама, если известно, что вынутая карта красной масти?

В колоде карт четыре масти: червы и бубны — красные масти, трефы и пики — черные. В каждой масти одинаковый набор из 8 карт: туз, король, дама, валет, 10, 9, 8, 7. Равновероятными исходами рассматриваемого опыта будут следующие 32 события: «вынули карту пиковый туз», «вынули карту 8 червей» и т. п. Действительно, одно из этих событий при взятии карты из колоды происходит. Эти события попарно несовместны, так как все карты разные. Следовательно, эти события образуют множество исходов рассматриваемого опыта. Но условия опыта симметричны относительно этих событий (у всех карт равные шансы быть вынутыми). Поэтому перечисленные исходы опыта равновероятны. Нам известно, что произошло событие B = «вынута карта красной масти». Таких карт в колоде 16 (8 карт бубновой масти и 8 карт червонной масти), т. е. событию B благоприятствует 16 исходов опыта, $m=16$. Из них надо отобрать те, которые благоприятствуют интересующему нас событию A = «вынута дама». Таких исходов два: «вынута червонная дама» и «вынута бубновая дама», т. е. $k=2$. Следовательно,

$$P(A \mid B)=2/16=1/8.$$

Непосредственно из определения условной вероятности следует утверждение, которое принято называть *теоремой умножения*.

Теорема 3. *Для любых двух событий A и B справедливо равенство*

$$P(A \cap B)=P(A \mid B) \cdot P(B).$$

В качестве применения этой теоремы докажем предложение, которое обычно называется *формулой полной вероятности*.

Теорема 4. *Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ таковы, что $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i=E$ и $A_i \cap A_j=U$ при любых $i \neq j$. Тогда*

$$P(B)=\sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i).$$

Доказательство. Условие $A_i \cap A_j=U$ при любых $i \neq j$ означает, что события A_i попарно несовместны. Условие $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i=E$ говорит о том, что в результате опыта одно из событий A_i обязательно произойдет. Таким образом, события $A_1, \ldots, A_k$ образуют множество исходов (не обязательно равновероятных) рассматриваемого опыта, или полную группу событий. Так как $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i=E$, то в силу распределительного закона в алгебре событий

$$B = B \cap E = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{k} (B \cap A_i).$$

Кроме того, события, объединяемые в правой части равенства, попарно несовместны. Действительно, при любых $i \neq j$ в силу условий теоремы

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = (B \cap B) \cap (A_i \cap A_j) = B \cap U = U.$$

Отсюда, пользуясь теоремой сложения, получаем

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

(в силу теоремы умножения). Теорема доказана.

Пример 3. Партия электрических лампочек на 20% изготовлена заводом I, на 30% — заводом II и на 50% — заводом III. Для завода I вероятность выпуска бракованной лампочки равна 0,01, для завода II — 0,005 и для завода III — 0,006. Какова вероятность того, что взятая из партии наудачу лампочка окажется бракованной?

Нас интересует событие B = «взятая из партии лампочка бракованная». Рассмотрим три события: A_1 = «взятая лампочка изготовлена заводом I», A_2 = «взятая лампочка изготовлена заводом II» и A_3 = «взятая лампочка изготовлена заводом III». Эти события попарно несовместны, и одно из них обязательно должно произойти (при выборе лампочки из рассматриваемой партии). Кроме того, в условиях задачи сказано, что $P(A_1) = 0{,}2$, $P(A_2) = 0{,}3$, $P(A_3) = 0{,}5$, $P(B \mid A_1) = 0{,}01$, $P(B \mid A_2) = 0{,}005$ и $P(B \mid A_3) = 0{,}006$. Подставляя эти значения в формулу полной вероятности, получаем

$$P(B) = 0{,}01 \cdot 0{,}2 + 0{,}005 \cdot 0{,}3 + 0{,}006 \cdot 0{,}5 = 0{,}0065.$$

Замечание. Формула полной вероятности сохраняется, если условие $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = E$ заменить на условие $B \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

Упражнения.

1. Докажите, что если $P(A \mid B) > P(A)$, то $P(B \mid A) > P(B)$.

2. Бросили игральную кость. Какова вероятность того, что выпало простое число очков, если известно, что число выпавших очков нечетно?

3. Из колоды карт в 32 листа (см. пример 2) наудачу вынута карта. Какова вероятность того, что это туз, если известно, что вынутая карта черной масти?

4. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимается один шар. Какова вероятность, что он красный, если известно, что вынутый шар не синий?

5. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность того, что они зеленые, если известно, что не вынут синий шар?

6. В условиях упр. 5 какова вероятность, что вынутые шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар?

7. Часы изготовляются на трех заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 40% продукции, второй — 45% и третий — 15%. В продукции первого завода спешат 80% часов, у второго — 70% и у третьего — 90%. Какова вероятность того, что купленные часы спешат?

8. На сборку попадают детали из трех автоматов. Известно, что первый автомат дает брака 0,3%, второй — 0,2% и третий — 0,4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если из первого автомата поступило 1000 деталей, из второго — 2000 и из третьего — 2500.

9. Три станка подают детали в общий бункер. Вероятность выпуска бракованной детали для первого станка равна 0,03, для второго — 0,02 и для третьего — 0,01. Производительность первого станка в три раза больше производительности второго, а производительность третьего станка в два раза больше производительности второго. Какова вероятность того, что взятая наудачу из бункера деталь будет бракованной?

10. По самолету производится три выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,5, при втором — 0,6, при третьем — 0,8. При одном попадании самолет будет сбит с вероятностью 0,3, при двух — с вероятностью 0,6, при трех — самолет будет сбит наверняка. Какова вероятность того, что самолет будет сбит?

11. Заготовки на сборку поступают из двух бункеров: 70% из первого и 30% из второго. При этом заготовки первого бункера имеют плюсовые допуски в 10% случаев, а второго — в 20%. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь имеет плюсовой допуск?

12. При включении двигатель начинает работать с вероятностью p. а) Какова вероятность того, что двигатель начнет работать со второго включения? б) Какова вероятность того, что для запуска двигателя потребуется не более двух включений?

13. Истребитель, вооруженный двумя ракетами, идет на перехват цели. Он занимает положение, пригодное для атаки, с вероятностью p_1. Из этого положения истребитель выпускает ра-

кеты, которые независимо друг от друга с вероятностью p_2 выходят в окрестность цели. Ракета, выведенная в окрестность цели, поражает цель с вероятностью p_3. Какова вероятность того, что цель будет поражена?

14. Истребитель атакует бомбардировщик, делает один выстрел и сбивает бомбардировщик с вероятностью p_1. Если этим выстрелом бомбардировщик не сбит, то он стреляет по истребителю и сбивает его с вероятностью p_2. Если истребитель этим выстрелом не сбит, то он еще раз стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью p_3. Найти вероятности следующих событий:

A = «сбит бомбардировщик»,
B = «сбит истребитель»,
C = «сбит хотя бы один самолет».

15. Завод изготовляет валики, каждый из которых имеет дефект с вероятностью p. Валик проверяется одним контролером, обнаруживающим дефект с вероятностью p_1 (если дефект не обнаружен, то валик идет в готовую продукцию). Кроме того, контролер может забраковать валик, не имеющий дефекта, с вероятностью α. Найти вероятности следующих событий:

A = «валик будет забракован»,
B = «валик будет ошибочно забракован»,
C = «валик, имеющий дефект, будет пропущен в готовую продукцию».

16. Завод изготовляет валики, каждый из которых имеет дефект с вероятностью p. За продукцией следят два контролера, работающих последовательно. Вероятность обнаружить дефект для первого контролера равна p_1, для второго — p_2; вероятность забраковать валик без дефекта для первого контролера равна α_1, для второго — α_2. Если хотя бы один из контролеров бракует валик, то он идет в брак. Найдите вероятности событий A, B и C, указанных в упр. 15.

17. Доказать, что условная вероятность события обладает основными свойствами вероятности события:

а) $0 \leqslant P(A \mid B) \leqslant 1$ при любых событиях A и B;
б) если $A \cap B = U$, то $P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C)$.

18. Доказать замечание к теореме 4.

19. Обобщить теорему умножения (теорему 3) на случай трех, четырех и k событий.

20. В белом ящике лежат 12 красных и 6 синих одинаковых на ощупь шаров. В желтом ящике лежат 15 красных и 10 синих одинаковых на ощупь шаров. Бросается игральная кость. Если число выпавших очков кратно трем, то наудачу вынимают шар из белого ящика. Если число выпавших очков не кратно трем, то вынимают наудачу шар из желтого ящика. Какова вероятность того, что вынутый шар красный?

21. На сборку попадают детали, изготовленные тремя автоматами. Известно, что первый автомат дает 0,3% брака, второй — 0,2% и третий — 0,4%. Найдите вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000, со второго — 2000 и с третьего — 2500 деталей.

22. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго — 0,03 и для третьего — 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше, чем второго, а третьего — в два раза меньше, чем второго. Определите вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной.

23. Литье в болванках поступает из двух заготовительных цехов: 70% из первого цеха и 30% — из второго. При этом материал первого цеха имеет 10% брака, а второго — 20%. Найдите вероятность того, что одна взятая наугад болванка не имеет дефектов.

24. Производится стрельба по цели одним снарядом. Цель состоит из трех частей, площади которых равны S_1, S_2 и S_3 $(S_1+S_2+S_3=S)$. Для снаряда вероятность попасть в ту или другую часть пропорциональна площади этой части. При попадании в первую часть цель поражается с вероятностью p_1, во вторую часть — с вероятностью p_2, в третью часть — с вероятностью p_3. Найдите вероятность поражения цели, если известно, что в нее попал один снаряд.

25. Группа студентов состоит из a отличников, b хорошо успевающих и c занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена наугад вызывается один студент. Найдите вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку.

3. Теорема Бейеса. В ряде случаев приходится иметь дело с опытами, в которых случайным образом может присутствовать то или иное условие. Мы проводим этот опыт и по полученным результатам хотим выяснить, какова вероятность того, что в проведенном опыте присутствовало одно из возможных случайных условий. Поясним сказанное примером.

П р и м е р 1. В пяти ящиках лежат одинаковые на ощупь шары. В двух ящиках лежат по 6 белых и 4 черных шара (это ящики первого состава). В двух других ящиках лежат по 8 белых и 2 черных шара (это ящики второго состава). И в одном ящике лежат 8 черных и 2 белых шара (это ящик третьего состава). Мы наудачу подходим к ящику и вынимаем один шар. Он оказывается черным. Чему равна вероятность того, что шар вынимался из урны первого состава?

В этом примере опыт состоит в вынимании наудачу шара из ящика. А случайный элемент в этом опыте — состав шаров в ящике, из которого вынимался шар (ведь к ящикам мы подходим наудачу: случайно могли подойти к ящику первого состава, случайно могли подойти к ящику второго состава, случайно могли подойти к ящику третьего состава). После того, как опыт проведен, т. е. шар вынут и мы увидели, что он черный, надо определить вероятность того, что шар вынимался из ящика первого состава (т. е. определить вероятность того, что в опыте присутствовал определенный случайный элемент — в данном случае набор шаров в ящике первого состава).

Решение этого примера мы отложим до вывода соответствующей формулы, которая называется формулой Бейеса. Отметим еще, что аналогичная ситуация наблюдается в артиллерии, когда делается пристрелка и в соответствии с ее результатами вносится поправка прицела (пристрелка как раз и определяет те случайные элементы, которые присутствуют в опыте).

Теорема (Бейеса). *Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная группа событий. Тогда*

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(A \mid H_k) \cdot P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)}.$$

Доказательство. По теореме умножения

$$P(A \cap H_k) = P(A \mid H_k) \cdot P(H_k),$$
$$P(A \cap H_k) = P(H_k \mid A) \cdot P(A).$$

Следовательно, правые части этих равенств равны:

$$P(A \mid H_k) \cdot P(H_k) = P(H_k \mid A) \cdot P(A),$$

откуда, поделив обе части полученного равенства на $P(A)$, в силу формулы полной вероятности имеем

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(A \mid H_k) \cdot P(H_k)}{P(A)} = \frac{P(A \mid H_k) \cdot P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)}.$$

Теорема доказана.

События H_k называются гипотезами, и поэтому доказанная формула называется еще *формулой вероят-*

ности гипотез. Название это можно объяснить следующим образом: имеются гипотезы (т. е. предположения) о том, какие случайные элементы могут присутствовать в опыте. Так, в примере 1 естественно рассматривать следующие гипотезы: H_1 = «шар вынимается из ящика первого состава», H_2 = «шар вынимается из ящика второго состава» и H_3 = «шар вынимается из ящика третьего состава». Три указанных события попарно несовместны, и одно из них в результате опыта должно произойти. Следовательно, это полная группа событий. Событие же A означает «вынут черный шар».

Дадим теперь решение примера 1, пользуясь формулой Бейеса. Поскольку к ящикам мы подходим наудачу, то $P(H_1) = 0{,}4$, $P(H_2) = 0{,}4$ и $P(H_3) = 0{,}2$. Далее, вероятность вынуть из ящика черный шар, если известно, что мы подошли к ящику первого состава, есть

$$P(A \mid H_1) = 0{,}4;$$

вероятность вынуть черный шар, если известно, что мы подошли к ящику второго состава, есть

$$P(A \mid H_2) = 0{,}2,$$

и вероятность вынуть черный шар, если известно, что мы подошли к ящику третьего состава, есть

$$P(A \mid H_3) = 0{,}8.$$

Для разбираемого нами случая формула Бейеса принимает вид

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(A \mid H_1) \cdot P(H_1)}{P(A \mid H_1) \cdot P(H_1) + P(A \mid H_2) \cdot P(H_2) + P(A \mid H_3) \cdot P(H_3)} =$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}4}{0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 0{,}4.$$

Следовательно, вероятность того, что шар вынимался из ящика первого состава, равна 0,4.

Упражнения.

1. Вычислите для примера 1 вероятности того, что шар вынут из ящика второго состава и что шар вынут из ящика третьего состава.

2. Клапаны, изготовляемые в цехе, проверяются двумя контролерами. Вероятность того, что клапан попадает на проверку первому контролеру, равна 0,6, а ко второму — 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет забракована, для первого контро-

лера равна 0,06, а для второго — 0,02. При проверке забракованных клапанов обнаружен годный. Найти вероятность того, что этот клапан проверял первый контролер.

3. Из 10 деталей 4 окрашены. Вероятность того, что окрашенная деталь тяжелее нормы, равна 0,3, а для неокрашенной детали эта вероятность равна 0,1. Взятая наудачу деталь оказалась тяжелее нормы. Найдите вероятность того, что она окрашена.

4. В собранной электрической цепи может быть поставлен предохранитель первого типа, который при перегрузке срабатывает с вероятностью 0,8, или предохранитель второго типа, который при перегрузке срабатывает с вероятностью 0,9. Предохранитель первого типа может быть поставлен в цепь с вероятностью 0,6, а второго типа — с вероятностью 0,4. Предохранитель в цепи сработал. Что вероятнее: поставлен предохранитель первого типа или второго?

5. В спартакиаде участвуют: из первой группы 4 студента, из второй — 6 и из третьей — 5. Студент первой группы попадает в сборную института с вероятностью 0,9, для студента второй группы эта вероятность равна 0,7, а для студента третьей группы — 0,8. Наудачу выбранный студент попал в сборную института. В какой группе, вероятнее всего, учится этот студент?

6. 96% продукции завода имеют повышенное качество. Если упростить процесс проверки качества продукции, то 2% продукции повышенного качества не будут признаны таковыми и 5% продукции, не имеющей повышенного качества, окажутся признанными за продукцию повышенного качества. Найти вероятность того, что при такой проверке изделие, выпущенное с маркой «повышенное качество», действительно имеет повышенное качество.

7. В пирамиде установлено 10 винтовок, 4 из которых имеют оптический прицел. Вероятность поражения мишени из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95, а из винтовки без оптического прицела — 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: была взята винтовка с оптическим прицелом или без него?

8. Мимо бензоколонки проезжают легковые и грузовые машины. Среди них грузовых машин 60%. Вероятность того, что проезжающая машина подъедет на заправку для грузовых машин, равна 0,1, а для легковых — 0,2. К бензоколонке подъехала на заправку машина. Найти вероятность того, что она грузовая.

9. Вся продукция проверяется двумя контролерами. Вероятность того, что изделие попадет на проверку к первому контролеру, равна 0,55, а ко второму — 0,45. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, а второй — 0,02. Взятое наудачу изделие с маркой «стандарт» оказалось бракованным. Какова вероятность того, что это изделие проверялось вторым контролером?

10. Три стрелка одновременно выстрелили, и в мишени обнаружены две пули. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго — 0,5, а для третьего — 0,4.

11. Изделие может поступить для обработки на первый станок с вероятностью 0,2, на второй станок — с вероятностью 0,3

и на третий станок — с вероятностью 0,5. При обработке на первом станке вероятность брака равна 0,02, на втором — 0,03, на третьем — 0,05. Выбранное наудачу изделие оказалось бракованным. Чему равны вероятности гипотез: «изделие было обработано на первом станке», «изделие было обработано на втором станке» и «изделие было обработано на третьем станке»?

12. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй — 46% и третьей — 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй — 2%, а для третьей — 1%. Найдите вероятность того, что наудачу взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.

13. В группе из десяти студентов, пришедших на экзамен, трое подготовлены отлично, четверо — хорошо, двое — посредственно и один — плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный — на 16, посредственно — на 10, плохо — на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найдите вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

§ 4. Теорема Бернулли

1. Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Многие задачи теории вероятностей сводятся к следующей схеме, которая называется *схемой Бернулли*: некоторый опыт повторяется n раз независимым образом.

Например, мы бросили одновременно 10 монет и смотрим, что выпало. Этот опыт можно рассматривать как десятикратное повторение более простого опыта — бросания одной монеты. Ясно, что при бросании 10 монет выпадение герба или цифры на одной монете не зависит от того, что выпало на другой монете. В этом состоит наглядный смысл выражения «опыт повторяется 10 раз независимым образом». В п. 1 § 3 мы уже обсуждали такую ситуацию для двух независимых повторений опыта. При этом было выяснено, что интуитивное представление о независимости проведенных опытов приводит к тому, что вероятности событий при этом не меняются, а вероятности пересечения событий равны произведению вероятностей этих событий. Эти предварительные наглядные соображения служат отправным пунктом для определения того, что значит выражение «опыт повторили n раз независимым образом». Мы рассмотрим несколько более общую ситуацию (вспомните примеры 2 и 3 из § 3, п. 1).

Определение. Пусть имеется n опытов $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Скажем, что они *независимы*, если выполнены следующие условия:

1) если событие A может произойти в опыте S_k, то оно может произойти и в опыте Ω, состоящем в том, что проведены все n опытов; при этом вероятность события A в опыте Ω равна вероятности события A в опыте S_k;

2) при произвольном выборе события A_1 из опыта S_1, события A_2 из опыта S_2 и т. д., события A_n из опыта S_n выполнено равенство

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n).$$

Определение. Скажем, что опыт S *повторили n раз независимым образом*, если независимы следующие n опытов: опыт S_1 есть первое осуществление опыта S, опыт S_2 есть второе осуществление опыта S и т. д., опыт S_n есть n-е осуществление опыта S.

Решим теперь простейшую для схемы испытаний Бернулли задачу. В опыте S может произойти событие A с вероятностью $p = P(A)$. Опыт S повторили n раз независимым образом. Какова вероятность того, что событие A при этом произошло m $(0 \leqslant m \leqslant n)$ раз? Эту вероятность принято обозначать $P_{m,n}$. А ответ на поставленный вопрос дает *формула Бернулли*:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad q = 1 - p. \tag{1}$$

Для доказательства этой формулы перенумеруем все опыты в порядке их осуществления от 1 до n и введем события A_k = «в опыте с номером k произошло событие A». Тогда по условию задачи и в силу того, что опыты производятся независимым образом, $P(A_k) = p$ при любом k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Событие $\overline{A}_k$ = «в опыте с номером k событие A не произошло» имеет вероятность $P(\overline{A}_k) = 1 - P(A_k) = 1 - p = q$. Нас интересует вероятность события $B_{m,n}$ = «опыт S повторили n раз независимым образом, и при этом событие A произошло m раз», т. е.

$$P_{m,n} = P(B_{m,n}).$$

Событие $B_{m,n}$ происходит, если событие A происходит в каких-то m опытах — их номера $i_1, i_2, \ldots, i_m$

(это m различных целых чисел от 1 до n). Тогда в остальных $n-m$ опытах событие A не произошло. Номера этих опытов обозначим $i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n$ (это $n-m$ различных целых чисел, при этом $\{i_1; i_2; \ldots; i_m\} \cup \{i_{m+1}; i_{m+2}; \ldots; i_n\} = \{1; 2; 3; \ldots; n\}$). Следовательно, событие

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m} \cap \overline{A}_{i_{m+1}} \cap \overline{A}_{i_{m+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n} \quad (2)$$

благоприятствует событию $B_{m,n}$. Вероятность этого события-пересечения равна

$$P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_m}) \cdot P(\overline{A}_{i_{m+1}}) P(\overline{A}_{i_{m+2}}) \ldots P(\overline{A}_{i_n}) = \\ = p^m \cdot q^{n-m} \quad (3)$$

в силу независимости событий A_k (эти события принадлежат опытам с разными номерами, а эти опыты по условию независимы).

Событие $B_{m,n}$ произойдет, если произойдет хотя бы одно из событий-пересечений вида (2), т. е.

$$B_{m,n} = \\ = \cup (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m} \cap \overline{A}_{i_{m+1}} \cap \overline{A}_{i_{m+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n}). \quad (4)$$

При этом в объединение входят все события-пересечения, для которых $\{i_1; i_2; \ldots; i_m\}$ есть любое m-элементное подмножество множества $\{1; 2; \ldots; n\}$ — множества, состоящего из n элементов (а $\{i_{m+1}; i_{m+2}; \ldots; i_n\}$ есть подмножество множества $\{1; 2; \ldots; n\}$, дополнительное к множеству $\{i_1; i_2; \ldots; i_m\}$). Число таких подмножеств равно C_n^m, и это есть число событий-пересечений, входящих в объединение (4).

События-пересечения попарно несовместны. Действительно, разным событиям соответствуют разные множества $\{i_1; i_2; \ldots; i_m\}$, т. е. эти события отличаются хотя бы одним элементом — обозначим его буквой k. Тогда одно пересечение имеет вид $A_k \cap (\ldots)$, другое — $\overline{A}_k \cap (\ldots)$, а их пересечение — $(A_k \cap (\ldots)) \cap (\overline{A}_k \cap (\ldots)) = (A_k \cap \overline{A}_k) \cap (\ldots) = U$, т. е. события-пересечения попарно несовместны. Но тогда по второй теореме сложения вероятность $P(B_{m,n})$ равна сумме вероятностей событий-пересечений, входящих в объединение (4). Но вероятность каждого события-пересечения равна

$p^m \cdot q^{n-m}$ по формуле (3) и число их C_n^m. Следовательно,

$$P_{m,n} = P(B_{m,n}) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Формула Бернулли доказана.

Пример 1. Какова вероятность того, что при 10 бросаниях игральной кости два раза выпадут три очка?

Здесь $n=10$, $m=2$, $p=1/6$, $q=1-p=5/6$ и

$$P_{2,10} = C_{10}^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} \cdot \frac{5^8}{6^{10}} \approx 0{,}29.$$

Проводить вычисления приходится при помощи логарифмической линейки или при помощи таблиц. Однако при больших n и m такие подсчеты уже затруднительны, поэтому для соответствующих подсчетов имеются приближенные формулы (с ними мы познакомимся ниже). Пока же в примерах мы не будем иметь дело с большими числами (чтобы не усложнять вычислений). Но и по таким простым ситуациям уже можно будет понять практические приложения всего изложенного.

Пример 2. Десять человек одновременно идут обедать в две столовые с одинаковым числом мест. Каждый из них выбирает любую из этих столовых с вероятностью 1/2 и независимо от выбора остальных. По скольку мест надо иметь в каждой столовой, чтобы с вероятностью, большей 0,8, посетитель не стоял в очереди?

Решение проводится подбором числа мест в столовых. Прежде всего, ясно, что если в каждой столовой будет по 10 мест, то очереди не будет. Но это число мест с большим запасом (по условию задачи). Посмотрим, что получится, если в каждой столовой будет по 5 мест. Нас интересует вероятность события A = «в обеих столовых нет очереди». Пусть столовые имеют номера: № 1 и № 2. Введем события A_k = «в столовую № 1 пришло k человек». Так как (для рассматриваемого случая) $A = A_5$, то достаточно вычислить вероятность события A_5. При этом можно воспользоваться формулой Бернулли. Здесь опыт состоит в том, что идущий обедать выбирает столовую № 1 с вероятностью 1/2. Этот опыт производится каждым из 10 обедающих независимо от других. Следовательно, по формуле Бернулли с $p=1/2=q$ получаем

$$P(A_k)=P_{k,10}=C_{10}^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=C_{10}^k:1024,$$

$$P(A)=P(A_5)=C_{10}^5:1024=252:1024\approx 0{,}257.$$

Таким образом, по 5 мест иметь в столовых недостаточно.

Попробуем тогда рассмотреть случай, когда в каждой столовой имеется по 7 мест. Тогда

$$A=A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6\cup A_7.$$

Действительно, если произошло событие A_3, то это значит, что в столовую № 1 пришло 3 человека (и здесь очереди нет), и тогда в столовую № 2 пришло 7 человек (и в ней нет очереди). Следовательно, $A_3\subset A$. Аналогично устанавливается, что и события A_4, A_5, A_6 и A_7 тоже благоприятствуют событию A. Остальные же события A_k не благоприятствуют событию A. Например, если произошло событие A_2, то это значит, что в столовую № 1 пришло 2 человека (и в ней, следовательно, нет очереди), но тогда в столовую № 2 пришло 8 человек и в ней образовалась очередь. Поскольку события, указанные в объединении, попарно несовместны, то

$$P(A)=P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)+P(A_7)=$$
$$=\frac{C_{10}^3}{1024}+\frac{C_{10}^4}{1024}+\frac{C_{10}^5}{1024}+\frac{C_{10}^6}{1024}+\frac{C_{10}^7}{1024}=\frac{912}{1024}\approx 0{,}89.$$

Таким образом, в столовых достаточно иметь по 7 мест.

Проверим, а нельзя ли обойтись меньшим числом мест, например шестью? Тогда

$$A=A_4\cup A_5\cup A_6,$$
$$P(A)=P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)=$$
$$=\frac{C_{10}^4+C_{10}^5+C_{10}^6}{1024}=\frac{672}{1024}\approx 0{,}66,$$

т. е. иметь в столовых по 6 мест недостаточно.

Итак, в столовых должно быть по 7 мест.

Отметим практическое следствие из приведенного решения. Мы получили, что при 7 местах в каждой столовой вероятность пообедать без очереди приблизительно равна 0,9, и, следовательно, вероятность образования очереди приблизительно равна 0,1. Практически это значит, что очередь будет образовываться в среднем один раз в десять дней; это можно признать вполне удовлетворительной организацией питания.

Исследуем теперь, как меняется вероятность $P_{m,n}$ при изменении m и фиксированном n. Для этого рассмотрим выражение

$$\frac{P_{m,n}}{P_{m+1,n}}=\frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1}}=\frac{(m+1)\,q}{(n-m)\,p}.$$

Для тех значений m, для которых это отношение меньше единицы, величина $P_{m,n}$ увеличивается с увеличением m. Для остальных m она уменьшается. Решая относительно m неравенство

$$\frac{P_{m,n}}{P_{m+1,n}}=\frac{(m+1)\,q}{(n-m)\,p}\leqslant 1,$$

получаем (поскольку $p+q=1$)

$$m\leqslant np-q.$$

Таким образом, при $m\leqslant np-q=m_0$ с ростом m растет и $P_{m,n}$. А при $m>m_0$ с ростом m уменьшается $P_{m,n}$.

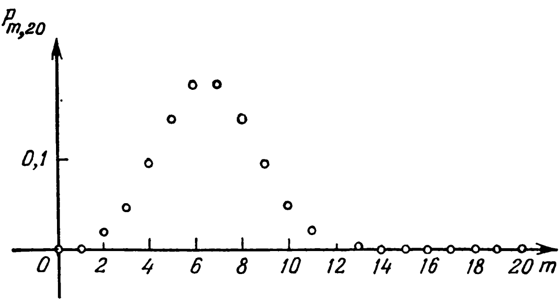


Рис. 21.

Следовательно, $P_{m,n}$ имеет наибольшее значение или при $m=[m_0]$, или при $m=[m_0]+1$. На рис. 21 приведен график $P_{m,n}$ как функции от m.

Итак, около числа np находятся значения m, при которых вероятность $P_{m,n}$ принимает максимальное значение. Поэтому говорят, что np есть наиболее

Таблица значений $P_{m,20}$ при $p=1/3$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	3	1,4	4,3	9,1	1,46	1,82	1,82	1,48	9,9
10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}	10^{-2}

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5,4	2,5	9	3	7	1	2	3	2	1	3
10^{-2}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-10}

(в третьей строке указан множитель для чисел из второй строки — это значение $P_{m,20}$, в первой строке указано m).

вероятное число опытов, в которых произойдет интересующее нас событие.

Пример 3. Игральную кость бросают 100 раз. Нас интересует событие A = «число выпавших очков кратно трем». Найти наиболее вероятное число опытов, в которых произойдет событие A.

В этом примере $n=100$, $p=1/3$, $q=2/3$. Следовательно, при $m \leqslant np-q=100\cdot(1/3)-(2/3)=32^2/_3$ вероятность $P_{m,100}$ возрастает (как функция m), т. е. $P_{33,100} \geqslant P_{32,100} > P_{31,100} > \ldots$ А при $m \geqslant 33$ вероятность $P_{m,100}$ убывает (как функция m), т. е. $P_{33,100} > P_{34,100} > P_{35,100} > \ldots$ Таким образом, эта вероятность имеет наибольшее значение при $m=33$:

$$P_{33,100}=C_{100}^{33}\left(\frac{1}{3}\right)^{33}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{67}\approx 0{,}08.$$

Итак, в рассмотренном примере число очков, кратное трем, вероятнее всего, выпадет 33 раза из 100. Обратите внимание на то, что $33\approx 100\cdot(1/3)$.

Упражнения.

1. Разобрать доказательство формулы Бернулли для частного случая $n=4$, $m=1$, выписывая полностью формулу (4).

2. Провести полностью рассуждения для примера 2.

3. Какова вероятность того, что при 10 бросаниях игральной кости три раза выпадет пять очков? Один раз?

4. Какова вероятность того, что при 10 бросаниях игральной кости одно очко выпадет не более трех раз?

5. Какова вероятность того, что при 10 бросаниях игральной кости число очков, кратное трем, выпадет больше двух, но меньше пяти раз?

6. Что вероятнее — выиграть у равносильного противника (ничейный результат исключается): а) три партии из четырех или пять из восьми; б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

7. Монету бросают 100 раз. Сколько раз, вероятнее всего, выпадет при этом герб? Подсчитайте приблизительно эту вероятность.

8. В мастерской работает 6 моторов. Для каждого мотора вероятность перегрева к обеденному перерыву равна 0,8. Найдите вероятность того, что к обеденному перерыву: а) перегреются 4 мотора; б) перегреются все моторы; в) ни один мотор не перегреется.

9. Вероятность появления события A в опыте равна 0,3. Опыт повторили 5 раз независимым образом. Какова вероятность того, что событие A при этом появится не менее двух раз?

10. В приборе стоят 6 одинаковых предохранителей. Для каждого из них вероятность перегореть после 1000 часов работы равна 0,4. Если перегорело не менее двух предохранителей, то прибор требует ремонта. Найти вероятность того, что прибор потребует ремонта после 1000 часов работы, если предохранители перегорают независимо друг от друга.

11. Вероятность появления события A в опыте равна 1/4. Опыт повторили 8 раз независимым образом. Найти вероятность того, что: а) событие A при этом появится не более двух раз; б) событие A при этом появится хотя бы два раза; в) событие A появится хотя бы один раз, но не более трех раз; г) событие A появится более четырех раз; д) Чему равно наиболее вероятное число появлений события A?

12. В ящике лежат несколько тысяч предохранителей. Половина их изготовлена заводом № 1, остальные — заводом № 2. Наудачу вынули пять предохранителей. Чему равна вероятность того, что заводом № 1 из них изготовлены: а) два; б) менее двух; в) более двух?

13. 40% шестерен, лежащих в ящике, изготовлены на заводе № 1, остальные — на заводе № 2. Из ящика взяли наудачу 7 шестерен. Какова вероятность того, что среди них окажутся изготовленными заводом № 1: а) две; б) менее трех; в) более двух?

14. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0,9. Вероятность поражения цели при k ($k \geqslant 1$) попаданиях равна $1-(0,1)^k$. Найти вероятность поражения цели: а) при двух выстрелах; б) при трех выстрелах.

15. Игральную кость бросают 180 раз. Сколько раз, вероятнее всего, выпадет шесть очков? Простое число очков?

16. Пусть всхожесть ржи составляет 90%. Чему равна вероятность того, что из 7 посеянных семян взойдут 5?

2. Теорема Бернулли. Теорема Бернулли устанавливает связь теории вероятностей с ее практическими приложениями. Она открывает целый ряд подобного рода теорем, с частью которых мы еще познакомимся позднее. Открыта эта теорема была Я. Бернулли на рубеже XVII и XVIII веков, а опубликована только в 1713 г. (уже после смерти ученого).

Теорема (Бернулли). *Событие A происходит в опыте S с вероятностью $p=P(A)$. Опыт S повторяется n раз независимым образом. При этом событие A происходит m раз. Тогда для любого положительного числа a справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a\right)=0. \tag{1}$$

Прежде чем доказывать эту теорему, сделаем некоторые разъяснения.

После того, как опыт S повторен n раз независимым образом, число m может оказаться любым от 0 до n, так что выполнение неравенства

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a \tag{2}$$

есть случайное событие. Вероятность этого случайного события записана под знаком предела. Эта вероятность есть функция от n, т. е. мы имеем последовательность, предел которой и вычисляется. В теореме утверждается, что этот предел равен нулю. Это означает, что, какое бы положительное число ε мы ни взяли, для всех достаточно больших n будет выполнено неравенство

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a\right)<\varepsilon.$$

Иначе говоря, вероятность выполнения неравенства (2) как угодно мала (говорят, что это практически невозможное событие,— им на практике можно пренебречь). Но тогда обратное неравенство

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|< a \tag{3}$$

произойдет почти наверняка (говорят, что это практически достоверное событие). Но неравенство (3) означает, что с любой степенью точности (с точностью до произвольно выбранного числа a) частота появления события A — число m/n — дает нам величину p — вероятность события A. И происходит это практически достоверно, если n достаточно велико.

Вот именно это качество вероятности события, о котором мы говорили в самом начале, и определяет ценность этого понятия. Оно проявляется при многократном и независимом повторении опыта и несет вполне определенную положительную информацию: при n-кратном повторении опыта событие произойдет приблизительно np раз.

Для доказательства теоремы Бернулли нам потребуются три вспомогательных равенства:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1, \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k p^k q^{n-k} = np, \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k^2 p^k q^{n-k} = npq + n^2 p^2. \tag{6}$$

Справедливость равенства (4) следует из формулы Ньютона (натуральной степени бинома):

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

Для доказательства равенства (5) тоже воспользуемся формулой Ньютона:

$$(x+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k q^{n-k}. \tag{7}$$

Это равенство верно при любом действительном x, т. е. слева и справа в равенстве (7) стоят равные функции. Следовательно, равны и их производные (т. е. тождества можно дифференцировать):

$$n(x+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k x^{k-1} q^{n-k}. \tag{8}$$

Подставив в полученное равенство $x = p$ и умножив обе части на p, получаем равенство (5), поскольку $p+q=1$.

Для доказательства равенства (6) умножим обе части формулы (8) на x и продифференцируем полученное:

$$n(x+q)^{n-1}+n(n-1)x(x+q)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k k^2 x^{k-1} q^{n-k}.$$

Умножив обе части полученного равенства на x и положив $x=p$, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k^2 p^k q^{n-k}=$$
$$=np(p+q)^{n-1}+n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}=$$
$$=np+n^2p^2-np^2=n^2p^2+np(1-p)=n^2p^2+npq.$$

Равенство (6) доказано.

Переходим теперь к доказательству теоремы. Начнем с доказательства (частного случая) неравенства Чебышева

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a\right)\leqslant\frac{pq}{a^2n}, \tag{9}$$

из которого уже будет следовать утверждение теоремы — равенство (1) — в силу теоремы о промежуточной функции, поскольку правая часть в неравенстве (9) имеет пределом нуль.

Итак, надо доказать неравенство (9). Событие, состоящее в том, что после n-кратного повторения опыта оказалось выполненным неравенство (2), мы будем обозначать

$$\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a\right),$$

т. е. будем интересующее нас неравенство ставить в круглые скобки. Пользуясь событиями $B_{m,n}$, введенными в предыдущем пункте, запишем

$$\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a\right)=\bigcup_{m,\ \left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a} B_{m,n}, \tag{10}$$

где в объединение входят только те события $B_{m,n}$, у которых индекс m удовлетворяет неравенству (2). В равенстве (10) справа записано, что произошло хотя бы одно из событий, состоящее в том, что число m удовлетворяет неравенству (2), т. е. событие, указанное в левой части этого равенства. Но для разных m события $B_{m,n}$ попарно несовместны. Поэтому, в силу (второй) теоремы сложения,

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a\right)=\sum_{m,\ \left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a} P(B_{m,n})=$$

$$=\sum_{m,\ \left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a} P_{m,n}. \qquad (11)$$

Здесь сумма справа берется только по тем номерам m, которые удовлетворяют неравенству (2). Теперь будем увеличивать слагаемые, стоящие в правой части равенства (11). Поскольку m удовлетворяет неравенству (2), то

$$\left(\frac{m-np}{an}\right)^2\geqslant 1,$$

и (поскольку все слагаемые положительны) потому

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a\right)\leqslant \sum_{m,\ \left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a}\left(\frac{m-np}{an}\right)^2 P_{m,n}\overset{(1)}{\leqslant}$$

$$\overset{(1)}{\leqslant}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{m-np}{an}\right)^2 P_{m,n}. \qquad (12)$$

(1) Здесь мы берем сумму уже по всем номерам m от 0 до n (могут добавиться положительные слагаемые, а вся сумма — увеличиться). Остается вынести за скобки $\frac{1}{a^2n^2}$ — общий множитель всех слагаемых, числитель возвести в квадрат по формуле квадрата суммы и сгруппировать вместе слагаемые, содержащие m^2, отдельно — слагаемые, содержащие m, и отдельно — слагаемые, не содержащие m:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a\right)\leqslant\frac{1}{a^2n^2}\left(\sum_{m=0}^{n} m^2C_n^m p^m q^{n-m}-\right.$$

$$\left.-2np\sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m}+n^2p^2\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2n^2}(npq+n^2p^2-2n^2p^2+n^2p^2)=\frac{pq}{a^2n}$$

в силу равенств (6), (5) и (4). Неравенство (9) доказано. Следовательно, доказана и теорема Бернулли.

3. Формулы Лапласа. В упражнениях уже можно было заметить, что вычисления по формуле Бернулли при больших m и n связаны с определенными трудностями. Чтобы избежать этих трудностей, в начале XIX века Лапласом были доказаны теоремы, из которых следуют две простые *приближенные формулы Лапласа:*

локальная формула Лапласа

$$P_{m,n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right) \tag{1}$$

и *интегральная формула Лапласа*

$$\sum_{a \leqslant m \leqslant b} P_{m,n} \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{2}$$

Таблица функций φ и Φ помещена в приложении 6 (графики этих функций изображены на рис. 22 и 23).

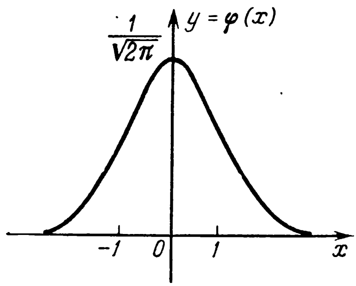


Рис. 22.

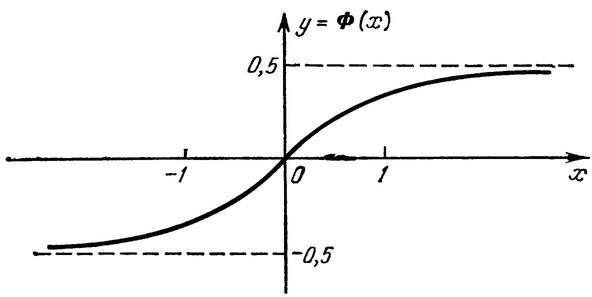


Рис. 23.

При пользовании ею надо помнить, что функция φ четная, а Φ нечетная. Кроме того, с точностью до 0,0001 можно считать, что

$$\varphi(x) = 0, \quad \Phi(x) = 0{,}5 \text{ при } x \geqslant 4. \qquad (3)$$

Доказательство приближенных формул Лапласа дано в приложении 4. Покажем на примерах, что пользоваться этими формулами нетрудно. (Интересно, что с увеличением n точность этих приближенных формул повышается.)

Пример 1. Игральную кость бросают 800 раз. Какова вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет 267 раз?

В этом примере нас интересует вероятность $P_{267,\,800}$. Следовательно, $n = 800$, $m = 267$, $p = 1/3$ и $q = 2/3$. По локальной формуле Лапласа

$$P_{267,\,800} \approx \frac{1}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\, \varphi\left(\frac{267 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) = \frac{3}{40}\, \varphi\left(\frac{1}{40}\right) \approx 0{,}03.$$

Значение $\varphi\left(\frac{1}{40}\right) = \varphi(0{,}025) \approx 0{,}398812$ найдено по таблице.

Пример 2. Игральную кость бросают 800 раз. Какова вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет не меньше 260 и не больше 274 раз?

В этом примере нужно воспользоваться интегральной формулой Лапласа при $n = 800$, $p = 1/3$ и $q = 2/3$. Искомая вероятность есть

$$\sum_{260 \leqslant m \leqslant 274} P_{m,\,800} \approx \Phi\left(\frac{274 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) - \Phi\left(\frac{260 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) = \Phi(0{,}55) - \Phi(-0{,}5) = 0{,}208840 + 0{,}191462 \approx 0{,}4.$$

Значения $\Phi(0{,}55) = 0{,}208840$ и $\Phi(-0{,}5) = -\Phi(0{,}5)$ найдены по таблицам.

Обратите внимание на то, что интересующие нас 15 значений m расположены около наиболее вероятного числа появлений события. Если 15 значений m выбрать не около наиболее вероятного числа появлений события, то вероятность окажется меньше.

Пример 3. Игральную кость бросают 800 раз. Какова вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет не меньше 280 и не больше 294 раз?

В этом примере (как и в примере 2) надо воспользоваться интегральной формулой Лапласа при $n=800$, $p=1/3$ и $q=2/3$. Искомая вероятность есть

$$\sum_{280\leqslant m\leqslant 294} P_{m,\,800} \approx \Phi\left(\frac{294-800\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{800\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}}\right)-$$

$$-\Phi\left(\frac{280-800\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{800\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}}\right)=\Phi(2{,}05)-\Phi(1)=$$

$$=0{,}479818-0{,}341343\approx 0{,}14.$$

Значения $\Phi(2{,}05)=0{,}479818$ и $\Phi(1)=0{,}341345$ найдены из таблиц.

И чем дальше от наиболее вероятного числа появлений события будут расположены 15 номеров, тем меньше будет вероятность.

Пользуясь этими же формулами Лапласа, можно выяснить, насколько может отличаться число появлений события от его наиболее вероятного числа появлений.

Пример 4. Опыт повторили независимым образом n раз. Событие A в этом опыте происходит с вероятностью p. Какова вероятность того, что $|m-np|\leqslant \leqslant 3\sqrt{npq}$, где m — число опытов, в которых произошло событие A, $q=1-p$?

В силу интегральной формулы Лапласа интересующая нас вероятность есть

$$\sum_{np-3\sqrt{npq}\leqslant m\leqslant np+3\sqrt{npq}} P_{m,n} \approx \Phi\left(\frac{np+3\sqrt{npq}-np}{\sqrt{npq}}\right)-$$

$$-\Phi\left(\frac{np-3\sqrt{npq}-np}{\sqrt{npq}}\right)=\Phi(3)-\Phi(-3)=0{,}9973.$$

Значение $\Phi(3)=0,498650$ найдено по таблице, а $\Phi(-3)=-\Phi(3)=-0,498650$.

Обратите внимание на то, что вероятность получилась очень близкой к единице. Поэтому выполнение указанного в примере неравенства есть практически достоверное событие — оно выполняется почти наверняка. А противоположное неравенство, т. е.

$$|m-np|>3\sqrt{npq},$$

имеет вероятность 0,0027 (приблизительно 1/4%) и потому есть практически невозможное событие. Полученная здесь закономерность есть частный случай так называемого правила «трех сигм» (см. § 7, п. 4).

Отметим, что отклонение m от np пропорционально $\sqrt{n}$. Это тоже проявление общей закономерности. Коротко говорят, что при n-кратном повторении опыта отклонения числа появлений события от np подчинены закону $\sqrt{n}$. Это означает, например, что при 10 000-кратном повторении опыта отклонения от 10 000 p почти наверняка не будут превышать 100.

Упражнения.

1. Монету бросают 400 раз. Какова вероятность того, что герб при этом выпадет: а) 200 раз; б) 160 раз; в) не менее 204, но не более 214 раз; г) не менее 196, но не более 206 раз?

2. Игральную кость бросают 500 раз. Какова вероятность того, что одно очко при этом выпадет: а) 83 раза; б) 78 раз; в) не менее 70 раз и не более 83 раз; г) не менее 76 раз, но не более 90 раз?

3. Фабрика выпускает 75% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что из 300 изделий число первосортных заключено между 219 и 234?

4. С вероятностью 0,8 орудие при выстреле поражает цель. Произведено 1600 выстрелов. Какова вероятность того, что при этом произошло: а) не менее 1200, но не более 1300 попаданий; б) не менее 1200 попаданий?

5. Игральную кость бросают 4200 раз. Какова вероятность того, что при этом три очка выпало: а) 700 раз; б) 500 раз; в) не менее 500 раз, но не более 650 раз; г) не менее 680 раз, но не более 730 раз?

6. Вероятность появления события A в опыте равна 0,2. Опыт повторили независимым образом 400 раз. Какова вероятность того, что при этом событие A произойдет: а) 80 раз; б) 70 раз; в) не менее 70, но не более 90 раз; г) не менее 76, но не более 82 раз; д) не менее 78 раз; е) не более 78 раз?

7. Событие A может произойти в опыте с вероятностью p. Опыт повторили n раз независимым образом. Какова вероятность того, что при этом выполнено неравенство

$$np-2\sqrt{npq}\leqslant m\leqslant np+2\sqrt{npq},$$

где m — число опытов, в которых появилось событие A, $q=1-p$?

8. В условиях упр. 7 найти вероятность того, что выполнено неравенство

$$|np-m|\leqslant 4\sqrt{npq}.$$

ГЛАВА II

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 5. Дискретные случайные величины

1. Случайная величина и ее математическое ожидание. Часто встречаются опыты, в результате которых случайным образом получаются числа. Например, при бросании игральной кости мы случайным образом получаем одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Или при измерениях получаются случайные ошибки и т. п. В таких случаях говорят, что мы имеем дело со случайной величиной. Случайные величины принято обозначать греческими буквами ξ (кси), η (эта), ζ (дзета) и т. д.

Знакомство со случайными величинами мы начнем с самых простых опытов, множество исходов в которых конечно. На примере с бросанием игральной кости мы видим, что каждому исходу опыта Q_k ставится в соответствие единственное число k — значение случайной величины. Поэтому естественно рассматривать случайную величину как функцию, заданную на множестве исходов данного опыта. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение. *Случайной величиной* называется функция, заданная на множестве исходов данного опыта.

Это значит, что каждому исходу опыта E_k поставлено в соответствие единственное число x_k, которое называется значением случайной величины ξ на исходе опыта E_k; пишут: $x_k = \xi(E_k)$. При этом некоторые из чисел x_k могут совпадать. Если же все значения случайной величины совпадают $(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a)$, то говорят, что рассматриваемая случайная величина есть постоянная, и пишут: $\xi = a$. Чаще всего случайная величина задается таблицей

Исходы	E_1	E_2	...	E_k	...	E_n
ξ	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n

(1)

или, короче,

Исходы	...	E_k	...
ξ	...	x_k	...

(2)

Со случайными величинами, рассматриваемыми в одном и том же опыте, обращаются, как с обычными числовыми функциями. Так, сумма случайной величины ξ, заданной таблицей (2), и случайной величины η, заданной таблицей

Исходы	...	E_k	...
η	...	y_k	...

(3)

есть случайная величина, которую обозначают $\xi + \eta$ и которая задается таблицей

Исходы	...	E_k	...
$\xi+\eta$	...	x_k+y_k	...

(4)

Аналогично определяется разность, произведение и частное случайных величин (для частного надо только потребовать, чтобы все значения случайной величины делителя были отличными от нуля):

Исходы	...	E_k	...
$\xi-\eta$	...	x_k-y_k	...
$\xi\cdot\eta$	...	$x_k\cdot y_k$	...
$\frac{\xi}{\eta}$	...	$\frac{x_k}{y_k}$	...

(5)

Часто приходится иметь дело с функциями от случайных величин. Получаются сложные функции от исходов опыта, т. е. опять-таки случайные величины. Так, функция f от случайной величины ξ есть случайная величина, задаваемая таблицей

Исходы	...	E_k	...
$f(\xi)$	...	$f(x_k)$	...

(6)

При этом надо иметь в виду, что все значения случайной величины ξ должны принадлежать области определения функции f.

Во многих вопросах для изучения случайной величины бывает достаточно ее простейших числовых характеристик — математического ожидания и дисперсии (дисперсия случайной величины будет определена в п. 4).

Определение. *Математическим ожиданием* случайной величины ξ, задаваемой таблицей (1), в опыте с n равновероятными исходами называется число

$$M\xi=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k. \tag{7}$$

Математическое ожидание случайной величины есть «ее среднее значение».

Пример 1. Для случайной величины ξ, заданной таблицей

Исходы	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
ξ	-3	10	0	5	-3	-1	-3	5	1	-3

в опыте с равновероятными исходами E_i вычислить $M\xi$.

По определению имеем

$$M\xi=\frac{1}{10}(-3+10+0+5-3-1-3+5+1-3)=0{,}8.$$

Докажем некоторые свойства математических ожиданий.

Теорема 1. *Если a и b — постоянные, то*

$$M(a\xi+b)=aM\xi+b.$$

Доказательство. Если случайная величина ξ задана таблицей (1) в опыте с равновероятными исходами, то случайная величина $a\xi+b$ (линейная функция от случайной величины ξ) в том же опыте задается таблицей

Исходы	...	E_k	...
$a\xi+b$	...	$a\cdot x_k+b$	...

и, в силу формулы (7),

$$M(a\xi+b)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(a\sum_{k=1}^{n}x_k+nb\right)=a\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)+b=aM\xi+b.$$

Теорема 2. *Если a и b — постоянные, то*

$$Ma\xi=aM\xi,\qquad Mb=b.$$

Доказательство следует из теоремы 1: первая формула получается при $b=0$, а вторая — при $a=0$.

Теорема 3. *Для любых двух случайных величин ξ и η справедлива формула*

$$M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta.$$

Доказательство. Пусть случайные величины ξ и η заданы таблицами (1) и (3) в опыте с n равновероятными исходами. Тогда случайная величина $\xi+\eta$ в том же опыте задается таблицей

Исходы	...	E_k	...
$\xi+\eta$	...	x_k+y_k	...

и, по определению математического ожидания,

$$M(\xi+\eta)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+y_k\right)=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k=M\xi+M\eta.$$

Из теоремы 3 по индукции сразу следует

Теорема 4. *Для случайных величин* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ *справедливо равенство*

$$M\left(\sum_{i=1}^{r}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{r}M\xi_i. \tag{8}$$

Упражнения. В опыте с равновероятными исходами случайные величины заданы следующей таблицей:

Исходы	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
ξ_1	7	−2	1	−5	3	−2	1	−2	0	1
ξ_2	5	−1	−7	0	10	4	−1	0	5	3
ξ_3	−6	−2	5	3	5	−2	0	5	1	0
ξ_4	−7	4	6	0	−5	4	−7	0	−3	4
ξ_5	10	0	7	−5	0	10	−5	1	−5	0

1. Найти математические ожидания случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5.

Для случайных величин ξ_1, ..., ξ_5 (заданных таблицей) найти:

2. $M(2\xi_1+3)$.
3. $M(5-3\xi_2)$.
4. $M(\xi_4+\xi_5)$.
5. $M(\xi_3-\xi_4)$.
6. $M(2\xi_1-5\xi_2)$.
7. $M(3\xi_1+2\xi_2-5\xi_3-\xi_4+7)$.
8. $M(\xi_3\cdot\xi_5)$.
9. $M(\xi_1\cdot\xi_4)$.
10. $M\xi_3^2$.
11. $M\xi_5^3$.
12. $M\dfrac{\xi_2}{\xi_1+1}$.
13. $M\dfrac{\xi_5}{\xi_4+2}$.
14. $M(\xi_1^2-2\xi_1+3)$.
15. $M(\xi_5^2-\xi_3^2+2\xi_2)$.

2. Закон распределения случайной величины. Для вычисления математического ожидания случайной величины на самом деле не обязательно знать всю таблицу (1). Об этом говорит следующая теорема о вычислении математического ожидания.

Теорема 5. *Пусть события A_1, A_2, ..., A_r попарно несовместны, $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_r=E$ и $\xi(E_i)=a_k$ при $E_i\subset A_k$. Тогда*

$$M\xi=\sum_{k=1}^{r}a_kp_k,\ \text{где}\ p_k=P(A_k). \tag{1}$$

Пояснить наглядно эту теорему можно так: мы объединяем те исходы опыта E_i, на которых случайная величина ξ сохраняет одно и то же значение a_k (см. доказательство теоремы). Это объединение и есть событие A_k (т. е. A_k состоит в том, что в результате опыта мы наблюдаем равенство $\xi=a_k$). Но иногда такое событие удобно «разбить на более мелкие события»; поэтому в теореме не исключено, что некоторые a_k совпадают.

Доказательство. Пусть E_i — равновероятные исходы опыта и (для простоты рассуждения) первые m_1 исходов E_1, E_2, ..., E_{m_1} благоприятствуют событию A_1, т. е. $p_1=m_1/n$, $x_1=x_2=\ldots=x_{m_1}=a_1$. Так как события A_1 и A_2 несовместны, то ни один из исходов E_1, E_2, ..., E_{m_1} не благоприятствует событию A_2 (ему благоприятствуют другие исходы). Пусть (для простоты рассуждений) это будут следующие m_2 исходов: E_{m_1+1}, E_{m_1+2}, ..., $E_{m_1+m_2}$, т. е. $p_2=m_2/n$, $x_{m_1+1}=x_{m_1+2}=\dots$ $\dots=x_{m_1+m_2}=a_2$. И так далее для всех событий A_k. Запишем теперь математическое ожидание случайной величины ξ и сгруппируем слагаемые в сумме:

$$M\xi=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{n}((x_1+x_2+\dots+x_{m_1})+$$
$$+(x_{m_1+1}+x_{m_1+2}+\dots+x_{m_1+m_2})+\dots)=$$
$$=\frac{1}{n}(m_1a_1+m_2a_2+\dots)=a_1\frac{m_1}{n}+a_2\frac{m_2}{n}+\dots=$$
$$=\sum_{k=1}^{r}a_kp_k.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если* $\xi\geqslant 0$, *то* $M\xi\geqslant 0$.

Подчеркнем, что из определения чисел p_k и попарной несовместности событий A_k следует, что

$$\sum_{k=1}^{r}p_k=1,\qquad 0<p_k\leqslant 1. \tag{2}$$

Таким образом, из теоремы 5 следует, что для вычисления математического ожидания случайной величины достаточно знать только числа a_k и p_k. Условия теоремы можно записать в виде таблицы:

События	A_1	A_2	...	A_r
ξ	a_1	a_2	...	a_r
P	p_1	p_2	...	p_r

(3)

Первую строку этой таблицы, содержащую попарно несовместные события A_k, обычно не выписывают, и таблица принимает вид

ξ	a_1	a_2	...	a_r
P	p_1	p_2	...	p_r

(4)

или, короче,

ξ	$\ldots$	a_k	$\ldots$
P	$\ldots$	p_k	$\ldots$

(5)

Однако надо помнить, что каждый столбец в этой таблице относится к некоторому событию, эти события попарно несовместны, в результате опыта одно из них происходит и числа p_k суть вероятности этих событий.

Определение. Таблица (5) называется *законом распределения* случайной величины ξ.

Числа a_k в этой таблице обычно различные. Если некоторые из a_k совпадают, то закон распределения называют *неприведенным*.

Основная и самая важная информация о случайной величине содержится в ее законе распределения. Из него можно получить все практически важные сведения о случайной величине. Поэтому для случайной величины в первую очередь выясняется, каков ее закон распределения.

Формула (1) для вычисления математического ожидания случайной величины была нами выведена в предположении, что исходы опыта равновероятны. В более сложных случаях эта формула является определением математического ожидания случайной величины с законом распределения (5).

Пример 1. Для случайной величины примера 1 из п. 1 записать закон распределения и выписать события A_k (фигурирующие в теореме 5).

Решение состоит в том, что в таблице, задающей случайную величину, надо «собрать вместе» столбцы, в которых указаны одинаковые значения этой случайной величины. В примере 1 получим

ξ	-3	-1	0	1	5	10
P	0,4	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1

Здесь $A_1 = E_1 \cup E_5 \cup E_7 \cup E_{10}$, $A_2 = E_6$, $A_3 = E_3$, $A_4 = E_9$, $A_5 = E_4 \cup E_8$, $A_6 = E_2$.

Пример 2. Найти математическое ожидание случайной величины с законом распределения

ξ	1	0
P	p	q

$q = 1 - p$.

Математическое ожидание подсчитывается по формуле (1):

$$M\xi = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

Пример 3. Даны s одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$, т. е. все они имеют один и тот же закон распределения:

ξ_j	1	0
P	p	q

$q = 1 - p$,

$j = 1, 2, \ldots, s$.

Найти математическое ожидание их суммы и среднего арифметического.

В силу примера 2 $M\xi_j = p$ при $j = 1, 2, \ldots, s$. Тогда, по формуле (8) из п. 1, имеем

$$M\left(\sum_{j=1}^{s} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{s} M\xi_j = sp.$$

Отсюда, в силу теоремы 2 из п. 1, получаем

$$M\left(\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} \xi_j\right) = \frac{1}{s} M\left(\sum_{j=1}^{s} \xi_j\right) = \frac{1}{s} sp = p. \qquad (6)$$

Для дальнейшего удобно будет обозначать через $(\xi = a)$ событие, состоящее в том, что в результате опыта случайная величина ξ приняла значение, равное a; через $(\xi > a)$ обозначать случайное событие, состоящее в том, что случайная величина ξ в результате опыта приняла значение, большее a; через $(a < \xi \leqslant b)$ обозначать событие, состоящее в том, что в результате опыта значение случайной величины попало в промежуток $]a; b]$, и т. п.

Пример 4. Для случайной величины ξ, закон распределения которой получен при решении примера 1, записать через исходы опыта (указанные при решении примера) события

$$(\xi = 5); \quad (\xi > 2); \quad (-1 < \xi \leqslant 7); \quad (\xi \leqslant -1)$$

и вычислить их вероятность.

Используя схему решения примера 1 (можно воспользоваться и таблицей примера 1 из п. 1), получаем

$$(\xi = 5) = E_4 \cup E_8, \quad P(\xi = 5) = 0{,}2;$$
$$(\xi > 2) = E_4 \cup E_8 \cup E_2, \quad P(\xi > 2) = 0{,}3;$$
$$(-1 < \xi \leqslant 7) = E_3 \cup E_9 \cup E_4 \cup E_8, \quad P(-1 < \xi \leqslant 7) = 0{,}4;$$
$$(\xi \leqslant -1) = E_6 \cup E_1 \cup E_5 \cup E_7 \cup E_{10}, \quad P(\xi \leqslant -1) = 0{,}5.$$

Упражнения.

1. Для случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 и ξ_5, заданных таблицей в упражнениях к п. 1, записать законы распределения.

2. Доказать, что $M(\xi - M\xi) = 0$.

3. Случайная величина ξ имеет закон распределения

ξ	0	−3	0	1	−3	0	−3
P	0,15	0,1	0,07	0,2	0,2	0,08	

Заполните в таблице пустую клеточку. Запишите закон распределения случайной величины ξ так, чтобы в первой строке все числа были различными (см. пример 1).

4. Случайная величина η имеет закон распределения

η	−1	0	3	0	−1	−1	3
P	0,2		0,14	0,1	0,23	0,08	0,21

Задание, как и в упр. 3.

Для случайных величин из упражнений к п. 1 записать через исходы опыта следующие события и вычислить их вероятности (в предположении, что исходы опыта равновероятны):

5. $(\xi_1 = -2)$.

6. $(\xi_2 > 0)$.
7. $(\xi_3 \leqslant 0)$.
8. $(-5 \leqslant \xi_4 < 4)$.
9. $(-10 \leqslant \xi_4 \leqslant 4)$.

Для случайных величин из упр. 3 и 4 вычислить:

10. $P(\xi = 0)$.
11. $P(\eta = -1)$.
12. $P(\xi > -2)$.
13. $P(\eta \leqslant e)$.
14. $P(-5 \leqslant \xi < 1)$.
15. $P(-1 \leqslant \eta \leqslant 0)$.
16. $P(\xi = 2)$.
17. $P(\eta < -1)$.

Для случайных величин из упр. 3 и 4 записать через объединение событий $(\xi = 0)$, $(\xi = -3)$, $(\eta = -1)$ и т. п. следующие события:

18. $(-5 \leqslant \xi < 1)$.
19. $(\xi \geqslant 0)$.
20. $(\xi < 0{,}7)$.
21. $(\eta < 1)$.
22. $(0 \leqslant \eta < 5)$.
23. $(\eta > -0{,}3)$.

3. Независимые случайные величины. Фундаментальную роль в теории вероятностей и ее приложениях играет понятие независимых случайных величин.

Определение. Две случайные величины ξ и η с законами распределения

ξ	...	a_i	...
P	...	p_i	...

η	...	b_j	...
P	...	p'_j	...

(1)

называются *независимыми*, если при любых i и j выполнено равенство

$$P((\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)) = P(\xi = a_i) \cdot P(\eta = b_j). \qquad (2)$$

Пример 1. Бросили две игральные кости — синюю и красную. Число очков, выпавших на синей кости, есть случайная величина ξ. Число очков, выпавших на красной кости, есть случайная величина η. Доказать, что это независимые случайные величины.

Независимость этих случайных величин наглядно ясна — число выпавших очков на одной кости не зависит от того, что выпало на другой. Посмотрим теперь, как наша интуиция согласована с данным определением.

Выпишем законы распределения случайных величин ξ и η:

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

η	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Так как при любых $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ выполнено равенство

$$P((\xi = i) \cap (\eta = j)) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(\xi = i) \cdot P(\eta = j),$$

то эти случайные величины независимы.

Теорема 6. *Если случайные величины ξ и η независимы, то*

$$M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta.$$

Доказательство. Запишем законы распределения (1) случайных величин ξ и η так, чтобы все a_i и все b_j были различны. Тогда

$$P(\xi = a_i) = p_i, \quad P(\eta = b_j) = p'_j$$

и, в силу независимости ξ и η, при любых i и j

$$P((\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)) = P(\xi = a_i) \cdot P(\eta = b_j) = p_i p'_j.$$

События $A_{ij} = (\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)$ (взятые для любых возможных сочетаний номеров i и j) удовлетворяют условиям теоремы 5. Действительно, они попарно несовместны, так как при $i \neq l$ имеем $a_i \neq a_l$ (таким образом нами был записан закон распределения случайной величины ξ), и поэтому $(\xi = a_i) \cap (\xi = a_l) = U$. Следовательно,

$$A_{ij} \cap A_{lk} = ((\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)) \cap ((\xi = a_l) \cap (\eta = b_k)) =$$
$$= (\xi = a_i) \cap (\xi = a_l) \cap \ldots = U.$$

Далее, поскольку $\bigcup_i (\xi = a_i) = E$ и $\bigcup_j (\eta = b_j) = E$ (так как в законах распределения выписаны все возможные значения случайной величины), то, перегруппировывая события в объединении и пользуясь распределительным законом в алгебре событий, получаем

$$\bigcup_{i,j} A_{ij} = \bigcup_{i,j} ((\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)) =$$
$$= ((\xi = a_1) \cap \bigcup_j (\eta = b_j)) \cup ((\xi = a_2) \cap \bigcup_j (\eta = b_j)) \cup \ldots =$$
$$= ((\xi = a_1) \cap E) \cup ((\xi = a_2) \cap E) \cup \ldots =$$
$$= \bigcup_i (\xi = a_i) = E.$$

И, наконец, если исход опыта есть $E_s \subset A_{ij} = (\xi = a_i) \cap \cap (\eta = b_j)$, то $\xi\eta$ имеет значение $a_i b_j$. Поэтому закон распределения случайной величины $\xi\eta$ может быть записан в виде

$\xi\eta$	...	$a_i b_j$	...
P	...	$p_i p_j'$	...

А тогда, пользуясь формулой (1) из п. 2, после перегруппировки слагаемых получаем доказательство теоремы:

$$M(\xi\eta) = \sum_{i,j} (a_i b_j)(p_i p_j') =$$
$$= a_1 p_1 \sum_j b_j p_j' + a_2 p_2 \sum_j b_j p_j' + \ldots =$$
$$= a_1 p_1 M\eta + a_2 p_2 M\eta + \ldots = M\eta \cdot \sum_i a_i p_i = M\eta \cdot M\xi.$$

Пример 2. Для случайных величин ξ и η из примера 1 вычислить $M(\xi\eta)$.

По определению математического ожидания

$$M\xi = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = M\eta.$$

Поскольку ξ и η независимы, то $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta = \frac{21}{6} \cdot \frac{21}{6} = \frac{441}{36}$.

Упражнения. Две независимые случайные величины заданы законами их распределения

ξ	-2	0	1	3
P	0,3	0,2	0,4	0,1

η	5	-1	4
P	0,1	0,6	0,3

1. Вычислите $M(\xi\eta)$.
2. Запишите закон распределения для случайной величины $\xi\eta$.
3. Докажите, что случайные величины $k\xi+q$ и $a\eta+b$ (k, a, q, b—постоянные) тоже независимы.
4. Докажите, что случайные величины ξ^2 и η^2 независимы.
5. Пусть f—обратимая функция. Докажите, что $f(\xi)$ и $f(\eta)$ — независимые случайные величины.

Две независимые случайные величины заданы законами их распределения

ξ	-1	1	2	4
P	0,2	0,4	0,3	0,1

η	-3	0	1
P	0,3	0,5	0,2

6. Вычислите $M(\xi\eta)$.
7. Запишите закон распределения для случайной величины $\xi\eta$.
8. Докажите, что случайные величины $2\xi+1$ и $5-3\eta$ независимы.
9. Докажите, что случайные величины $k\xi+q$ и $a\eta+b$ (a, b, q, k—постоянные) независимы.
10. Докажите, что случайные величины ξ^2 и η^2 независимы.
11. Докажите, что случайные величины $\frac{1}{\xi}$ и η^3 независимы.

4. Дисперсия случайной величины. Если математическое ожидание случайной величины дает нам «ее среднее значение» или точку на координатной прямой, «вокруг которой разбросаны» значения рассматриваемой случайной величины, то дисперсия характеризует «степень разброса» значений случайной величины около ее среднего значения. На рис. 24 изображены случайные величины ξ и η. Они имеют равные математические ожидания, но случайная величина ξ имеет «боль-

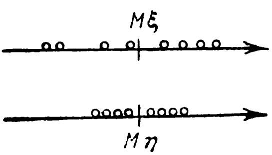


Рис. 24.

ший разброс значений», чем случайная величина η. Дадим теперь определение дисперсии случайной величины.

Определение. *Дисперсией* случайной величины ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Пример 1. Вычислим дисперсию случайной величины с законом распределения

ξ	1	0
P	p	q

$q = 1 - p$.

Так как $M\xi = p$ (см. упр. 2 из п. 2) и $q = 1 - p$, то закон распределения случайной величины $\xi - M\xi = \xi - p$ будет

$\xi - M\xi$	q	$-p$
P	p	q

а закон распределения для $(\xi - M\xi)^2$ будет

$(\xi - M\xi)^2$	q^2	p^2
P	p	q

Следовательно, в силу записанного закона распределения имеем

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = q^2 p + p^2 q = pq(q + p) = pq.$$

Докажем некоторые свойства дисперсии случайной величины.

Теорема 1. *Если a — постоянная, то*

$$D(a\xi) = a^2 D\xi.$$

Доказательство. По определению дисперсии случайной величины в силу свойства математического ожидания (теорема 2 из п. 1) имеем

$$D(a\xi)=M(a\xi-M(a\xi))^2=M(a\xi-aM\xi)^2=$$
$$=Ma^2(\xi-M\xi)^2=a^2M(\xi-M\xi)^2=a^2D\xi.$$

Теорема 2. *Для попарно независимых случайных величин*

$$D\left(\sum_{i=1}^{r}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{r}D\xi_i.$$

Доказательство сначала проведем для двух слагаемых:

$$D(\xi+\eta)=M(\xi+\eta-M(\xi+\eta))^2\overset{(1)}{=}$$
$$\overset{(1)}{=}M(\xi+\eta-M\xi-M\eta)^2=M((\xi-M\xi)+(\eta-M\eta))^2=$$
$$=M((\xi-M\xi)^2+2(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)+(\eta-M\eta)^2)\overset{(2)}{=}$$
$$\overset{(2)}{=}M(\xi-M\xi)^2+M(\eta-M\eta)^2+2M(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)\overset{(3)}{=}$$
$$\overset{(3)}{=}D\xi+D\eta+2M(\xi\eta-\xi M\eta-\eta M\xi+M\xi\cdot M\eta)\overset{(4)}{=}$$
$$\overset{(4)}{=}D\xi+D\eta+2(M(\xi\eta)-M(\xi M\eta)-M(\eta M\xi)+$$
$$+M(M\xi\cdot M\eta))\overset{(5)}{=}D\xi+D\eta+$$
$$+2(M\xi\cdot M\eta-M\xi\cdot M\eta-M\xi\cdot M\eta+M\xi\cdot M\eta)=D\xi+D\eta.$$

(1) Пользуемся тем, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

(2) Та же теорема, что и в объяснении (1).

(3) Первые два слагаемых суть дисперсии случайных величин ξ и η по определению.

(4) Та же теорема, что и в объяснении (1).

(5) Случайные величины ξ и η независимы по условию; следовательно, по теореме 6 п. 3 $M(\xi\eta)=$ $=M\xi\cdot M\eta$. Кроме того, $M\xi$ и $M\eta$ суть числа, т. е. постоянные, и можно воспользоваться теоремой 2 из п. 1.

В общем случае доказательство повторяет разобранный частный случай:

$$D\left(\sum_{i=1}^{r}\xi_i\right)=$$

$$=M\left(\sum_{i=1}^{r}\xi_i-M\left(\sum_{i=1}^{r}\xi_i\right)\right)^2=M\left(\sum_{i=1}^{r}(\xi_i-M\xi_i)\right)^2=$$

$$=M\left(\sum_{i=1}^{r}(\xi_i-M\xi_i)^2+2\sum_{j<i}(\xi_j-M\xi_j)(\xi_i-M\xi_i)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}M(\xi_i-M\xi_i)^2+2\sum_{j<i}M(\xi_j-M\xi_j)(\xi_i-M\xi_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}D\xi_i+2\sum_{j<i}M(\xi_j\xi_i-\xi_jM\xi_i-\xi_iM\xi_j+M\xi_j\cdot M\xi_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}D\xi_i+2\sum_{j<i}(M(\xi_j\xi_i)-M(\xi_jM\xi_i)-M(\xi_iM\xi_j)+$$

$$+M(M\xi_j\cdot M\xi_i))\overset{(1)}{=}\sum_{i=1}^{r}D\xi_i+$$

$$+2\sum_{j<i}(M\xi_j\cdot M\xi_i-M\xi_i\cdot M\xi_j-M\xi_j\cdot M\xi_i+M\xi_j\cdot M\xi_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}D\xi_i.$$

(1) Здесь мы воспользовались тем, что случайные величины попарно независимы и потому, в силу теоремы 6, $M(\xi_i\xi_j)=M\xi_i\cdot M\xi_j$.

В остальных местах использовали теорему о математическом ожидании суммы и вынесении постоянного множителя за знак математического ожидания (теорема 2 из п. 1).

Пример 2. Даны r одинаково распределенных и попарно независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$, т. е. все они имеют один и тот же закон распределения:

ξ_i	1	0
P	p	q

$i=1, 2, \ldots, r$;

$q=1-p$.

Найдем дисперсию их суммы и среднего арифметического.

В силу примера 1 $D\xi_i = pq$ при любом i. А тогда, по теореме 2,

$$D\left(\sum_{i=1}^{r} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{r} D(\xi_i) = rpq.$$

Для вычисления дисперсии среднего арифметического воспользуемся еще и теоремой 1:

$$D\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \xi_i\right) = \left(\frac{1}{r}\right)^2 D\left(\sum_{i=1}^{r} \xi_i\right) = \left(\frac{1}{r^2}\right) rpq = \frac{pq}{r}.$$

Этот пример очень важен для практических выводов из теории вероятностей. Поэтому его стоит обсудить несколько подробнее. Представим себе, что мы измеряем длину детали. Ее истинная длина равна a. Каждое измерение делается с некоторой ошибкой — получается не число a, а некоторое его приближение. Обозначим результат i-го измерения через ξ_i. Это некоторая случайная величина, поскольку ошибки в измерениях обычно случайны. Если в измерениях нет систематических ошибок (линейка правильная), то $M\xi_i = a$. Попробуем теперь представить себе, что такое дисперсия. Для этого рассмотрим упрощенную схему измерений: при каждом измерении может быть допущена ошибка h или $-h$ $(h > 0)$, и обе эти ошибки равновероятны. Тогда для ошибки измерения $\xi_i - a$ (это случайная величина) получаем закон распределения: при любом i

$\xi_i - a$	h	$-h$
P	0,5	0,5

Вычислим дисперсию этой ошибки:

$(\xi_i - a)^2$	h^2	h^2
P	0,5	0,5

и потому для любого i получаем

$$D\xi_i = h^2 \cdot 0{,}5 + h^2 \cdot 0{,}5 = h^2.$$

Итак, в этой упрощенной схеме ошибка измерения h и дисперсия $D\xi_i$ связаны таким образом:

$$\sqrt{D\xi_i} = h.$$

Эта связь в некотором смысле сохраняется и в общем случае: $\sqrt{D\xi}$ характеризует ошибку сделанного измерения.

Определение. Число $\sqrt{D\xi}$ называется *средним квадратичным отклонением.*

Пусть теперь измерения делаются независимо друг от друга. Тогда получаются случайные величины ξ_i, которые тоже попарно независимы. Ошибка среднего арифметического результатов измерений — это некоторая случайная величина — характеризуется корнем квадратным из дисперсии этой случайной величины, т. е.

$$\sqrt{D\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\xi_i\right)} = \frac{h}{\sqrt{r}}, \quad \sqrt{D\xi_i} = h \text{ при всех } i$$

в силу вычислений, проделанных при решении примера 2. Здесь надо обратить особое внимание на то, что эта ошибка в $\sqrt{r}$ раз меньше ошибки каждого измерения. Именно поэтому при измерениях пользуются средним арифметическим.

Замечание. Подчеркнем, что разные случайные величины могут быть одинаково распределены. Например, в опыте с равновероятными исходами случайные величины ξ и η, заданные таблицей

Исходы	E_1	E_2	E_3
ξ	0	1	1
η	1	0	1

суть разные случайные величины (так как на исходе опыта E_1 они имеют разные значения: $\xi(E_1) = 0$,

$\eta(E_1)=1$). Однако закон распределения у них один и тот же:

ξ_1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Упражнения.

1. Докажите, что дисперсия постоянной величины равна нулю.
2. Докажите, что $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2$.
3. Докажите, что $D(\xi+b)=D\xi$ при любой постоянной b.

Для случайных величин, приведенных в упражнениях к п. 1, вычислите:

4. $D(3-2\xi_1)$.
5. $D(5-\xi_2)$.
6. $D(7+3\xi_3)$.
7. $D(\xi_1+\xi_2)$ и сравните с $D\xi_1+D\xi_2$.
8. $D(\xi_2+\xi_3)$ и сравните с $D\xi_2+D\xi_3$.
9. Сколько измерений (проведенных с одинаковой точностью) надо сделать, чтобы результат среднего арифметического этих измерений был в 10 раз точнее каждого измерения?

5. Коэффициент корреляции. Мы познакомились в п. 3 с понятием независимости случайных величин. Наряду с этим хотелось бы иметь числовую характеристику, показывающую, насколько рассматриваемые случайные величины независимы. Эту характеристику называют коэффициентом корреляции.

Определение. *Коэффициентом корреляции* случайных величин ξ и η называют число

$$r(\xi;\ \eta)=\frac{M(\xi\eta)-M\xi\cdot M\eta}{\sqrt{D\xi\cdot D\eta}}.$$

Определение. *Корреляционным моментом* случайных величин ξ и η называют число

$$K(\xi;\ \eta)=M(\xi\eta)-M\xi\cdot M\eta.$$

Из этих определений, в частности, следует, что

$$r(\xi;\ \eta)=\frac{K(\xi;\ \eta)}{\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}}. \tag{1}$$

Отметим сразу, что для независимых случайных величин ξ и η выполнено равенство $r(\xi;\ \eta)=0=K(\xi;\ \eta)$. Действительно,

$$K(\xi;\ \eta)=M(\xi\eta)-M\xi\cdot M\eta=M\xi\cdot M\eta-M\xi\cdot M\eta=0.$$

Обратное утверждение неверно, т. е. корреляционный момент двух случайных величин может равняться нулю, но сами случайные величины при этом могут и не быть независимыми. Поэтому часто пользуются понятием некоррелированных случайных величин.

Определение. Случайные величины ξ и η называются *некоррелированными*, если

$$K(\xi;\ \eta)=0.$$

Для корреляционного момента часто бывают полезны и другие формулы; например, докажем, что

$$K(\xi;\ \eta)=M((\xi-M\xi)(\eta-M\eta)). \qquad (2)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} M(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)&=M(\xi\eta-\xi M\eta-\eta M\xi+M\xi\cdot M\eta)=\\ &=M(\xi\eta)-M\xi\cdot M\eta-M\eta\cdot M\xi+M\xi\cdot M\eta=\\ &=M(\xi\eta)-M\xi\cdot M\eta=K(\xi;\ \eta). \end{aligned}$$

Рассматривая доказательство теоремы о дисперсии суммы (п. 4, теорема 2, общий случай), легко заметить, что получена формула

$$D\left(\sum_{i=1}^{r}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{r}D\xi_i+2\sum_{j<i}K(\xi_i;\ \xi_j). \qquad (3)$$

Из нее получается и теорема 2 (сама записанная формула верна для любых случайных величин) и некоторое ее обобщение: для попарно некоррелированных случайных величин

$$D\left(\sum_{i=1}^{r}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{r}D(\xi_i). \qquad (4)$$

Приведем основные свойства коэффициента корреляции.

Теорема 1. *При любых ξ и η имеет место неравенство*

$$|r(\xi;\ \eta)|\leqslant 1.$$

Для доказательства воспользуемся тем, что математическое ожидание неотрицательной случайной величины есть число неотрицательное. Тогда для любого действительного числа x имеем

$$0 \leqslant M\left((\xi - M\xi) + x(\eta - M\eta)\right)^2 =$$
$$= M\left((\xi - M\xi)^2 + x^2(\eta - M\eta)^2 + 2x(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\right) =$$
$$= M(\xi - M\xi)^2 + x^2 M(\eta - M\eta)^2 +$$
$$+ 2xM\left((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\right) = D\xi + 2xK(\xi;\ \eta) + x^2 D\eta. \quad (5)$$

Мы получили квадратный трехчлен относительно x, все значения которого неотрицательны. Следовательно, дискриминант этого квадратного трехчлена неположителен:

$$K^2(\xi;\ \eta) - D\xi \cdot D\eta \leqslant 0,$$

откуда следует

$$\frac{K^2(\xi;\ \eta)}{D\xi \cdot D\eta} \leqslant 1, \text{ т. е. } |r(\xi;\ \eta)| \leqslant 1.$$

Для крайних значений коэффициента корреляции справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $\xi = a\eta + b$, *то* $|r(\xi;\ \eta)| = 1$. *При этом* $r(\xi;\ \eta) = 1$ *при* $a > 0$ *и* $r(\xi;\ \eta) = -1$ *при* $a < 0$. *И обратно: если* $|r(\xi;\ \eta)| = 1$, *то* $\xi = a\eta + b$.

Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть $\xi = a\eta + b$. Тогда $D\xi = a^2 D\eta$ и

$$K(\xi;\ \eta) = M\left((a\eta + b)\eta\right) - M(a\eta + b) \cdot M\eta =$$
$$= M(a\eta^2 + b\eta) - (aM\eta + b)M\eta =$$
$$= aM\eta^2 + bM\eta - a(M\eta)^2 - bM\eta =$$
$$= a\left(M\eta^2 - (M\eta)^2\right) = aD\eta.$$

Следовательно (поскольку $D\eta > 0$),

$$r(\xi;\ \eta) = \frac{aD\eta}{\sqrt{a^2 D\eta \cdot D\eta}} = \frac{aD\eta}{|a|\, D\eta} = \begin{cases} 1 & \text{при } a > 0, \\ -1 & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Для доказательства второй части теоремы заметим, что если $M\zeta^2 = 0$, то $\zeta = 0$. Действительно, по определению математического ожидания случайной величины ζ^2

$$0 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 p_i, \quad p_i = P(\zeta = z_i) > 0.$$

А так как все слагаемые неотрицательны, то равенство нулю может быть только в том случае, когда каждое слагаемое равно нулю: $z_i^2 p_i = 0$. А так как $p_i > 0$, то

$z_i=0$ для всех i. Теперь переходим к доказательству самого утверждения. Если $|r(\xi;\eta)|=1$, то $K^2(\xi;\eta)=D\xi\cdot D\eta$, т. е. квадратный трехчлен (5) в доказательстве теоремы 2 имеет действительный корень, обозначим его $-a$. Тогда

$$M((\xi-M\xi)-a(\eta-M\eta))^2=0,$$

откуда, в силу сделанного выше замечания, следует, что

$$(\xi-M\xi)-a(\eta-M\eta)=0,$$

т. е.

$$\xi=a\eta+b$$

(где $b=M\xi-aM\eta$).

Замечание. Про случайные величины, связанные равенством $\xi=a\eta+b$, говорят, что они линейно зависимы. Таким образом, доказанную теорему можно сформулировать иначе: для линейной зависимости случайных величин необходимо и достаточно, чтобы их коэффициент корреляции был по модулю равен единице.

Пример 1. Подсчитаем коэффициент корреляции для случайных величин ξ_1 и ξ_2 из упражнений к п. 1:

$$M\xi_1=\frac{1}{10}(7-2+1-5+3-2+1-2+0+1)=0{,}2,$$

$$M\xi_2=\frac{1}{10}(5-1-7+0+10+4-1+0+5+3)=1{,}8.$$

Вычислим теперь $M\xi_1^2$, $M\xi_2^2$ и $M(\xi_1\xi_2)$. Для этого заполним таблицу:

Исходы	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
ξ_1^2	49	4	1	25	9	4	1	4	0	1
ξ_2^2	25	1	49	0	100	16	1	0	25	9
$\xi_1\xi_2$	35	2	−7	0	30	−8	−1	0	0	3

$$M\xi_1^2=\frac{1}{10}(49+4+1+25+9+4+1+2+0+1)=9{,}7$$

$$M\xi_2^2=\frac{1}{10}(25+1+49+0+100+16+1+0+ +25+9)=22{,}6,$$

$$M(\xi_1\xi_2)=\frac{1}{10}(35+2-7+0+30-8-1+0+ +0+3)=5{,}4,$$

$$D\xi_1=M\xi_1^2-(M\xi_1)^2=9{,}76,$$
$$D\xi_2=M\xi_2^2-(M\xi_2)^2=19{,}36,$$
$$K(\xi_1;\ \xi_2)=M(\xi_1\xi_2)-M\xi_1\cdot M\xi_2=5{,}04,$$
$$r(\xi_1;\ \xi_2)=\frac{K(\xi_1;\ \xi_2)}{\sqrt{D\xi_1\cdot D\xi_2}}=0{,}37.$$

Упражнения. Для случайных величин из упражнений к п. 1 вычислите:

1. $r(\xi_3;\ \xi_4)$.
2. $r(\xi_3;\ \xi_5)$.
3. $r(\xi_4;\ \xi_5)$.

§ 6. Непрерывные случайные величины

1. Функция распределения и плотность вероятностей. В § 5 мы рассматривали случайные величины в простейших опытах, где множество исходов конечно. Такие случайные величины называются *дискретными*. В опытах с бесконечным множеством исходов, когда значения случайной величины образуют последовательность, случайная величина тоже называется дискретной. В более же сложных случаях, когда значения случайной величины заполняют целиком некоторый интервал, случайная величина называется *непрерывной*. Например, результат измерений есть некоторая случайная величина. Ее значения теоретически заполняют целый интервал, содержащий истинное значение измеряемой величины.

Для вычислений с дискретными случайными величинами мы пользовались их законом распределения, т. е. выписывали вероятности $P(\xi=a_i)$ для всех возможных значений случайной величины ξ. Для непрерывной же случайной величины выписать ее закон распределения невозможно. Вместо него вводится функция распределения случайной величины. Делается это так. Для любой случайной величины ξ можно рассматривать событие, состоящее в том, что в результате опыта она приняла значение, меньшее числа x. Это событие будем обозначать $(\xi < x)$. Можно рассматривать вероятность этого случайного события, ее мы будем обозначать $P(\xi < x)$. Этим на множестве всех действительных чисел определена функция

$$F(x) = P(\xi < x). \tag{1}$$

Она называется *функцией распределения случайной величины* ξ.

Пример 1. Найти функцию распределения случайной величины с законом распределения

ξ	-1	0	2	2,5
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Значения случайной величины ξ разбивают все действительные числа на пять промежутков. На каждом из них будем определять функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ.

Пусть $x \leqslant -1$; тогда $(\xi < x) = U$, так как случайная величина ξ не имеет значений, меньших $x \leqslant -1$. Поэтому

$$F(x) = P(U) = 0.$$

Пусть $-1 < x \leqslant 0$; тогда $(\xi < x) = (\xi = -1)$, и потому

$$F(x) = P(\xi = -1) = 0,2.$$

Пусть $0 < x \leqslant 2$; тогда $(\xi < x) = (\xi = -1) \cup (\xi = 0)$. Поскольку $(\xi = -1) \cap (\xi = 0) = U$, то в силу теоремы сложения

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = -1) + P(\xi = 0) = 0,2 + 0,3 = 0,5.$$

Пусть $2 < x \leqslant 2,5$; тогда $(\xi < x) = (\xi = -1) \cup (\xi = 0) \cup \cup (\xi = 2)$ и выписанные события попарно несовместны. Следовательно, по теореме сложения

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = -1) + P(\xi = 0) + \\ + P(\xi = 2) = 0,2 + 0,3 + 0,4 = 0,9.$$

И, наконец, при $x > 2{,}5$ будет $(\xi < x) = E$, так как любое значение случайной величины ξ меньше такого x, и потому

$$F(x) = P(\xi < x) = P(E) = 1.$$

Подытожим сделанные вычисления и вычертим график функции распределения (рис. 25):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -1, \\ 0{,}2 & \text{при } -1 < x \leqslant 0, \\ 0{,}5 & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 0{,}9 & \text{при } 2 < x \leqslant 2{,}5, \\ 1 & \text{при } 2{,}5 < x. \end{cases}$$

Сравнивая функцию распределения (лучше всего это видно на графике) с законом распределения, видим,

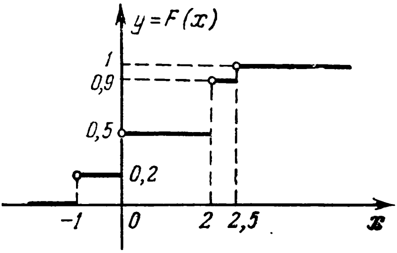


Рис. 25.

что возможные значения случайной величины суть абсциссы точек разрыва функции распределения. А вероятность, с которой такое значение принимается, равна скачку функции распределения в этой точке разрыва. Таким образом, и по функции распределения дискретной случайной величины легко восстановить ее закон распределения.

Из рис. 25 видно, что функция распределения не убывает, для всех x удовлетворяет неравенству $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ и

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Оказывается, что эти свойства имеют место для функции распределения любой случайной величины. Докажем это.

Теорема 1. *Если $F(x)$ — функция распределения, то $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ для любого x.*

Это следует из формулы (1), поскольку вероятность любого события заключена в промежутке от 0 до 1.

Теорема 2. *Функция распределения не убывает, и*

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2$ числа. Тогда

$$(\xi < x_2) = (\xi < x_1) \cup (x_1 \leqslant \xi < x_2)$$

и выписанные события несовместны. Следовательно, в силу теоремы сложения

$$P(\xi < x_2) = P(\xi < x_1) + P(x_1 \leqslant \xi < x_2),$$

откуда, по определению функции распределения случайной величины (формула (1)), получаем

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leqslant \xi < x_2).$$

Перенося $F(x_1)$ в левую часть последнего равенства, получаем формулу (2). А так как вероятность любого события есть число неотрицательное, то $F(x_2) \geqslant F(x_1)$. Поскольку x_1 и x_2 были взяты любыми, то неубывание функции F доказано.

Теорема 3. *Если $F(x)$ — функция распределения, то*

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \quad и \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0.$$

Доказательство. Так как $F(x)$ монотонна и ограничена, то эти пределы существуют. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ есть вероятность того, что в результате опыта случайная величина ξ приняла какое-то значение. Но в теории вероятностей рассматриваются только такие случайные величины, которые в результате опыта обязательно принимают некоторое значение. Иначе говоря, событие «в результате опыта случайная величина приняла некоторое значение» является достоверным событием, а его вероятность равна единице; $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$ есть вероятность того, что в результате опыта случайная величина не приняла никакого значения. Из сказанного выше следует, что это невозможное событие, а его вероятность равна нулю.

В теории вероятностей считается, что каждая случайная величина задается вместе со своей функцией распределения.

Пример 2. Опишите случайную величину, функция распределения которой приведена на рис. 26.

Случайная величина ξ не имеет значений, попадающих в промежутки $]-\infty; -1]$ и $[a; b]$. Далее,

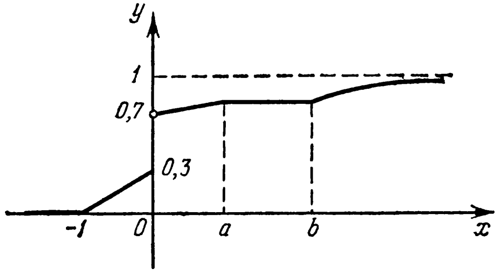


Рис. 26.

$P(\xi=0)=0{,}4$, а для любых других значений $P(\xi=x)=0$, но, в отличие от значений из отмеченных промежутков, они возможны. Действительно, все остальные точки функции распределения суть точки непрерывности. Если x_1 — точка непрерывности функции F, то

$$\lim_{x\to x_1^+} F(x)=F(x_1) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_1^-} F(x)=F(x_1).$$

Но

$$P(\xi=x_1)\leqslant P(x_1-\delta\leqslant\xi<x_1+\delta)=$$
$$=F(x_1+\delta)-F(x_1-\delta)$$

при любом $\delta>0$. Переходя в полученном равенстве к пределу при δ, стремящемся к нулю справа, и учитывая непрерывность функции F в точке x_1, получаем

$$0\leqslant P(\xi=x_1)\leqslant \lim_{\delta\to 0+} F(x_1+\delta)-\lim_{\delta\to 0+} F(x_1-\delta)=$$
$$=F(x_1)-F(x_1)=0,$$

т. е. $P(\xi=x_1)=0$.

Здесь фактически доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Если x есть точка непрерывности функции распределения случайной величины ξ, то $P(\xi=x)=0$.*

Из этой теоремы вытекает, что формулу (2) можно записывать с помощью строгих неравенств, если x_1

есть точка непрерывности для функции распределения случайной величины ξ.

Теорема 5. *Если x_1 есть точка непрерывности для функции распределения F случайной величины ξ, то*

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = P(x_1 < \xi < x_2), \tag{3}$$

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{4}$$

Доказательство. Действительно, так как

$$(x_1 \leqslant \xi < x_2) = (\xi = x_1) \cup (x_1 < \xi < x_2)$$

и эти события несовместны, то по теореме сложения

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = P(\xi = x_1) + P(x_1 < \xi < x_2) = \\ = P(x_1 < \xi < x_2),$$

поскольку $P(\xi = x_1) = 0$ в силу теоремы 4. А тогда

$$P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

в силу формулы (2).

Далее мы в основном будем иметь дело только с непрерывными функциями распределения. Поэтому будет безразлично, строгие или нестрогие неравенства записаны для случайной величины.

Определение. Если функция распределения F случайной величины ξ дифференцируема, то ее *плотностью вероятностей* называется

$$p(x) = F'(x). \tag{5}$$

Приведем основные свойства плотностей вероятностей.

Теорема 6. *Для любого x плотность вероятностей $p(x)$ неотрицательна и*

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx. \tag{6}$$

Доказательство. Так как функция распределения F не убывает, то $p(x) = F'(x) \geqslant 0$. Формула же (6) следует из формулы (4) и формулы Ньютона — Лейбница:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx.$$

Формула (6) имеет простой геометрический смысл (вспомните геометрический смысл определенного интеграла): $P(x_1 < \xi < x_2)$ есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности вероятностей и опирающейся на отрезок $[x_1; x_2]$ (рис. 27).

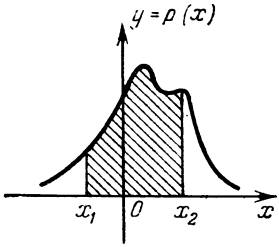


Рис. 27.

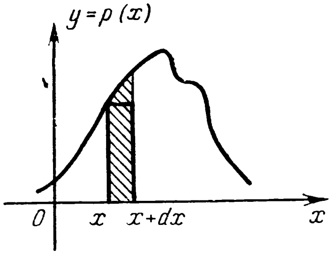


Рис. 28.

Полезно и приближенное равенство при малых dx:

$$P(x < \xi < x+dx) \approx p(x)\,dx \qquad (7)$$

(рис. 28), которое получается из соотношения

$$F(x+dx) - F(x) \approx F'(x)\,dx = p(x)\,dx.$$

Теорема 7. *Если $p(x)$ — плотность вероятностей случайной величины, то*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1.$$

Доказательство. По определению и в силу теоремы 3 имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b p(x)\,dx = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to \ \infty}} (F(b) - F(a)) =$$
$$= \lim_{b \to +\infty} F(b) - \lim_{a \to -\infty} F(a) = 1.$$

Наконец, приведем еще одну форму связи между плотностью вероятностей и функцией распределения.

Теорема 8. *Если $F(x)$ и $p(x)$ — функция распределения и плотность вероятностей случайной величины, то*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt.$$

Доказательство. По определению несобственного интеграла, в силу формулы Ньютона—Лейбница и по теореме 3 имеем

$$\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x} p(t)\,dt = \lim_{a\to-\infty}(F(x)-F(a)) =$$
$$= F(x) - \lim_{a\to-\infty} F(a) = F(x).$$

Пример 3. Случайная величина имеет плотность вероятностей $p(x)=a/(1+x^2)$. Определить a и функцию распределения.

Параметр a подберем с помощью теоремы 7:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\,dx}{1+x^2} = a\operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$
$$= a\frac{\pi}{2} - a\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi a.$$

Таким образом, $\pi a = 1$ и $a=1/\pi$. Функцию распределения найдем, пользуясь теоремой 8:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x}\frac{\frac{1}{\pi}dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} t\Big|_{-\infty}^{x} =$$
$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

Пример 4. Случайная величина имеет плотность вероятностей

$$p(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant 1,\\ a\dfrac{\ln x}{x^3} & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Определить a и функцию распределения.

Параметр a подберем с помощью теоремы 7:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{1} p(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} p(x)\,dx \overset{(1)}{=} \int_{1}^{+\infty} a\frac{\ln x}{x^3}dx =$$
$$= a\left(\frac{\ln x}{-2x^2}\Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}\right) \overset{(2)}{=} \frac{a}{4}\cdot\frac{-1}{x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{a}{4}\left(0+\frac{1}{1^2}\right) = \frac{a}{4}.$$

(1) Так как $p(x)=0$ при $x \leqslant 1$, то $\int\limits_{-\infty}^{1} p(x)\,dx = 0$.

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$.

Итак, мы получили, что $1 = a/4$, т. е. $a = 4$. А функцию распределения найдем, пользуясь теоремой 8: при $x \leqslant 1$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)\,dx = 0,$$

а при $x > 1$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{1} p(x)\,dx + \int\limits_{1}^{x} p(x)\,dx =$$

$$= 4\int\limits_{1}^{x} \frac{\ln x}{x^3}\,dx = 4\left(-\frac{\ln x}{2x^2}\Big|_1^x + \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{x} \frac{dx}{x^3}\right) =$$

$$= 4\left(-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}\Big|_1^x\right) = 1 - \frac{1+2\ln x}{x^2}.$$

Упражнения. Найдите функцию распределения и изобразите ее график для случайных величин из упражнения к п. 1 § 5: **1.** ξ_1. **2.** ξ_2. **3.** ξ_3. **4.** ξ_4. **5.** ξ_5.

6. Плотность распределения случайной величины $p(x)$ равна нулю вне отрезка $[1{,}3;\ 2{,}7]$ и $p(x)=h$ на этом отрезке. Определить h и записать функцию распределения. Найти вероятность того, что случайная величина попадет в отрезок $[-1{,}5;\ +1{,}9]$.

7. Случайная величина ξ имеет плотность вероятностей $p(x) = A\sin x$ на отрезке $[0;\ \pi]$ и $p(x)=0$ вне этого отрезка. Определить A, функцию распределения и $P\left(-\frac{\pi}{3} \leqslant \xi \leqslant \frac{2}{3}\pi\right)$.

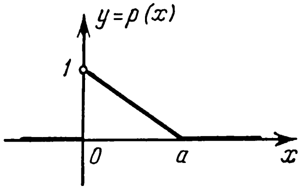


Рис. 29.

8. Случайная величина ξ имеет плотность вероятностей $p(x) = 3\cos ax$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2a};\ \frac{\pi}{2a}\right]$ и $p(x)=0$ вне этого отрезка. Определить a, функцию распределения и $P\left(\frac{\pi}{36} < \xi < \frac{\pi}{10}\right)$.

9. Может ли при каком-либо значении аргумента: 1) функция распределения быть больше единицы; 2) плотность вероятностей быть больше единицы; 3) функция распределения быть отрицательной; 4) плотность вероятностей быть отрицательной?

10. На рис. 29 приведен график плотности вероятностей случайной величины ξ. Найдите: 1) a и формулу для $p(x)$; 2) функцию распределения; 3) $P\left(\frac{a}{2} < \xi < a\right)$.

11. На рис. 30 приведен график функции распределения случайной величины ξ. Найдите: 1) формулу для $p(x)$; 2) формулу для функции распределения; 3) $P\left(\frac{a+b}{2} \leqslant \xi \leqslant \frac{3b+a}{4}\right)$.

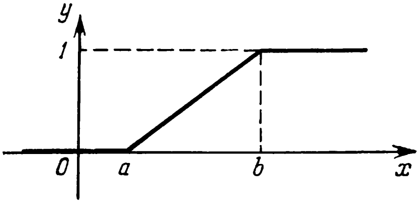


Рис. 30.

12. Случайная величина ξ распределена по закону Симпсона (график ее плотности вероятностей приведен на рис. 31).

1) Найдите ординату вершины треугольника на рис. 31;

2) запишите формулы для $p(x)$ и функции распределения;

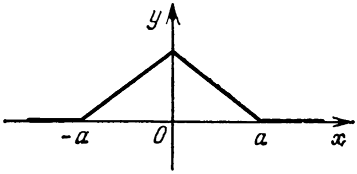


Рис. 31.

3) вычислите $P\left(-\frac{3}{2}a < \xi \leqslant \frac{a}{3}\right)$;

4) вычислите $P\left(\xi > -\frac{a}{2}\right)$.

2. Математическое ожидание и дисперсия. Для непрерывных случайных величин ξ, имеющих плотность вероятностей $p(x)$, математическое ожидание определяется уже при помощи интегралов (и может как существовать, так и не существовать).

Определение. *Математическим ожиданием* случайной величины ξ, имеющей плотность вероятностей $p(x)$, называется число

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,dx, \tag{1}$$

а ее *дисперсией* называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \tag{2}$$

Все основные вычислительные формулы § 5 при этом сохраняются:

$$M(a\xi+b)=aM\xi+b, \quad \text{где } a \text{ и } b\text{—постоянные;} \tag{3}$$

$$M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta; \tag{4}$$

$$D(a\xi+b)=a^2D\xi, \quad \text{где } a \text{ и } b\text{—постоянные;} \tag{5}$$

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2. \tag{6}$$

Прежде чем давать доказательство формулы (3), установим связь между функцией распределения и плотностью вероятностей случайных величин ξ и $a\xi+b$, где a и b—постоянные и $a\neq 0$.

Теорема 1. *Если $F(x)$ есть функция распределения случайной величины ξ, а $p(x)$—ее плотность вероятностей, то для случайной величины $a\xi+b$, где a и b—постоянные ($a\neq 0$), плотность вероятностей есть*

$$\frac{1}{|a|}p\left(\frac{x-b}{a}\right), \tag{7}$$

а функция распределения есть

$$F\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \textit{при} \quad a>0, \tag{8}$$

$$1-F\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \textit{при} \quad a<0. \tag{9}$$

Доказательство начнем со случая $a>0$. Обозначим через $F_1(x)$ функцию распределения для случайной величины $a\xi+b$ и через $p_1(x)$—ее плотность вероятностей. Тогда, по определению функции распределения,

$$F_1(x)=P(a\xi+b<x)\overset{(1)}{=}P\left(\xi<\frac{x-b}{a}\right)\overset{(2)}{=}F\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

(1) Поскольку неравенства $a\xi+b<x$ и $\xi<\frac{x-b}{a}$ равносильны, то события $(a\xi+b<x)$ и $\left(\xi<\frac{x-b}{a}\right)$ равны, т. е. это одно и то же событие.

(2) По определению функции распределения случайной величины ξ.

Тогда, по определению плотности вероятностей, имеем

$$p_1(x)=F_1'(x)=\left(F\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)'=\frac{1}{a}F'\left(\frac{x-b}{a}\right)=\frac{1}{a}p\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Поскольку $|a|=a$ при $a>0$, то формула (7) доказана.

Теперь разберем случай $a<0$. По определению функции распределения случайной величины $a\xi+b$ имеем

$$F_1(x)=P(a\xi+b<x)\overset{(1)}{=}P\left(\xi>\frac{x-b}{a}\right)\overset{(2)}{=}$$
$$\overset{(2)}{=}1-P\left(\xi\leqslant\frac{x-b}{a}\right)=1-F\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

(1) Поскольку $a<0$, то равносильны неравенства $a\xi+b<x$ и $\xi>\frac{x-b}{a}$ и потому равны события $(a\xi+b<x)$ и $\left(\xi>\frac{x-b}{a}\right)$.

(2) Переходим к противоположному событию $\overline{\left(\xi>\frac{x-b}{a}\right)}=\left(\xi\leqslant\frac{x-b}{a}\right)$ и пользуемся тем, что функция распределения F случайной величины ξ непрерывна (поскольку она дифференцируема) и потому нестрогие неравенства можно заменять на строгие.

Тогда, по определению плотности вероятностей, имеем

$$p_1(x)=F_1'(x)=$$
$$=\left(1-F\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)'=-\frac{1}{a}F'\left(\frac{x-b}{a}\right)=\frac{1}{|a|}p\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Поскольку $|a|=-a$ при $a<0$, то формула (7) доказана.

Теперь можно доказать формулу (3), опираясь на следующую теорему.

Теорема 2. *Если a и b — постоянные ($a\neq 0$), а $p(x)$ — плотность вероятностей случайной величины ξ, то*

$$M(a\xi+b)=\int_{-\infty}^{+\infty}(ax+b)\,p(x)\,dx, \tag{10}$$

$$M(a\xi+b)=aM\xi+b. \tag{11}$$

Доказательство опирается на теорему 1. Пусть $p_1(x)$ — плотность вероятностей случайной величины $a\xi+b$. Рассмотрим сначала случай $a>0$. Тогда, по определению математического ожидания случайной величины (формула (1)), имеем

$$M(a\xi+b)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp_1(x)\,dx \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{a}p\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (at+b)\frac{1}{a}p(t)\,a\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (at+b)\,p(t)\,dt.$$

(1) По теореме 1 $p_1(x)=\frac{1}{a}p\left(\frac{x-b}{a}\right)$ при $a>0$.

(2) Делаем замену переменной по формуле $t=\frac{x-b}{a}$; тогда $dx=a\,dt$, $x=at+b$, и так как $a>0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-b}{a}=+\infty$ (новый верхний предел интегрирования) и $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-b}{a}=-\infty$ (новый нижний предел интегрирования).

Если же $a<0$, то в вычислениях произойдут небольшие изменения:

$$M(a\xi+b)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp_1(x)\,dx \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{-1}{a}p\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \int_{+\infty}^{-\infty} (at+b)\frac{-1}{a}p(t)\,a\,dt \overset{(3)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (at+b)\,p(t)\,dt.$$

(1) По теореме 1 $p_1(x)=\frac{-1}{a}p\left(\frac{x-b}{a}\right)$ при $a<0$.

(2) Делаем замену переменной по формуле $t=\frac{x-b}{a}$; тогда $dx=a\,dt$, $x=at+b$, и так как $a<0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-b}{a}=-\infty$ (новый верхний предел интегрирования) и $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-b}{a}=+\infty$ (новый нижний предел интегрирования).

(3) Поменяли местами пределы интегрирования.

Таким образом, формула (10) полностью доказана. Из нее, в силу теоремы 7 из п. 1, следует формула (11):

$$M(a\xi+b)=\int_{-\infty}^{+\infty}(ax+b)\,p(x)\,dx=$$
$$=a\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,dx+b\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx=aM\xi+b.$$

Теперь выведем формулу для вычисления дисперсии случайной величины.

Теорема 3. *Если $p(x)$ — плотность вероятностей случайной величины ξ и $m=M\xi$, то*

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2\,p(x)\,dx. \qquad (12)$$

Доказательство начнем с нахождения функции распределения случайной величины $(\xi-m)^2$, обозначим ее $F_1(x)$. Поскольку $(\xi-m)^2\geqslant 0$, то при $x\leqslant 0$ имеем $((\xi-m)^2<x)=U$ и потому $F_1(x)=P((m-\xi)^2<x)=$ $=P(U)=0$. Как и раньше, функцию распределения случайной величины ξ обозначим через $F(x)$. При $x>0$ имеем

$$F_1(x)=P((\xi-m)^2<x)=P(m-\sqrt{x}<\xi<m+\sqrt{x})=$$
$$=F(m+\sqrt{x})-F(m-\sqrt{x}),$$

откуда получаем ($p_1(x)$ — плотность вероятностей случайной величины $(\xi-m)^2$, $p(x)$ — плотность вероятностей случайной величины ξ)

$$p_1(x)=F_1'(x)=F'(m+\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}-F'(m-\sqrt{x})\frac{-1}{2\sqrt{x}}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(p(m+\sqrt{x})+p(m-\sqrt{x})\right).$$

Итак,

$$p_1(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(p(m+\sqrt{x})+p(m-\sqrt{x})\right) & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Теперь можно вычислять дисперсию случайной ве личины ξ, пользуясь определением:

$$D\xi = M(m-\xi)^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xp_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} xp_1(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} xp_1(x)\,dx \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \int_{0}^{+\infty} x\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(p\left(m+\sqrt{x}\right)+p\left(m-\sqrt{x}\right)\right)dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} xp\left(m+\sqrt{x}\right)\frac{dx}{2\sqrt{x}} + \int_{0}^{+\infty} xp\left(m-\sqrt{x}\right)\frac{dx}{2\sqrt{x}} \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \int_{m}^{+\infty} (y-m)^2 p(y)\,dy - \int_{m}^{-\infty} (z-m)^2 p(z)\,dz \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \int_{m}^{+\infty} (x-m)^2 p(x)\,dx + \int_{-\infty}^{m} (x-m)^2 p(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 p(x)\,dx.$$

(1) Так как $p_1(x)=0$ при $x \leqslant 0$, то $\int_{-\infty}^{0} xp_1(x)\,dx = 0$.

(2) В первом интеграле делаем замену $y = m+\sqrt{x}$, тогда $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(m+\sqrt{x}\right) = +\infty$ (это верхний предел интегрирования), а во втором интеграле делаем замену $z = m-\sqrt{x}$, тогда $dz = -\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(m-\sqrt{x}\right) = -\infty$ (это верхний предел интегрирования).

(3) Переменную интегрирования опять обозначаем буквой x (от этого величина интеграла не изменится) и во втором интеграле меняем местами пределы интегрирования (при этом интеграл меняет знак на противоположный).

Формула (12) полностью доказана.

Формулы (10) и (12) (поскольку $D\xi = M(\xi-m)^2$) наводят на мысль, что при любой непрерывной функции f справедливо равенство

$$Mf(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, p(x)\, dx. \qquad (13)$$

Это действительно так, но доказывается сложно, и мы этого делать не будем.

Пример 1. Случайная величина имеет плотность вероятностей

$$p(x) = \begin{cases} h & \text{при} \quad -2 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 & \text{при} \quad x < -2 \text{ и } x > 3. \end{cases}$$

Найдем h, $M\xi$, $D\xi$, $P(1 < \xi < 5)$ и $F(x)$.

Для нахождения коэффициента h воспользуемся теоремой 7 из п. 1:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-2} p(x)\, dx + \int_{-2}^{3} p(x)\, dx + \int_{3}^{+\infty} p(x)\, dx = 5h.$$

Таким образом, $5h = 1$ и $h = 0{,}2$. Находим математическое ожидание по формуле (1):

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-2} xp(x)\, dx + \int_{-2}^{3} xp(x)\, dx + \int_{3}^{+\infty} xp(x)\, dx = \int_{-2}^{3} x \cdot 0{,}2 dx = 0{,}1x^2 \big|_{-2}^{3} = 0{,}5.$$

Находим дисперсию по формуле (12):

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - 0{,}5)^2 p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-2} (x - 0{,}5)^2 p(x)\, dx + \int_{-2}^{3} (x - 0{,}5)^2 p(x)\, dx + \int_{3}^{+\infty} (x - 0{,}5)^2 p(x)\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} (x - 0{,}5)^2\, 0{,}2 dx = \frac{0{,}2}{3} (x - 0{,}5)^3 \big|_{-2}^{3} = \frac{6{,}25}{3} \approx 2{,}1.$$

Вероятность того, что значение случайной величины попало в промежуток $]1; 5[$, находим по формуле (6) из п. 1:

$$P(1<\xi<5)=\int_1^5 p(x)\,dx=\int_1^3 p(x)\,dx+\int_3^5 p(x)\,dx=\int_1^3 0{,}2dx=0{,}4.$$

И, наконец, функцию распределения случайной величины находим, пользуясь теоремой 8 из п. 1. При $x\leqslant -2$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx=0,$$

поскольку $p(x)=0$ при $x<-2$. При $x\geqslant 3$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{-2} p(x)\,dx+\int_{-2}^{3} p(x)\,dx+\int_{3}^{x} p(x)\,dx=\int_{-2}^{3} 0{,}2dx=1,$$

поскольку $p(x)=0$ и при $x<-2$ и при $x>3$. В случае же, когда x удовлетворяет неравенству $-2<x<3$, имеем

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{-2} p(x)\,dx+\int_{-2}^{x} p(x)\,dx=\int_{-2}^{x} 0{,}2dx=0{,}2(x+2).$$

Итак,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant -2,\\ 0{,}2(x+2) & \text{при } -2<x<3,\\ 1 & \text{при } x\geqslant 3. \end{cases}$$

На рис. 32 и 33 приведены графики плотности вероятностей и функции распределения рассматриваемой случайной величины.

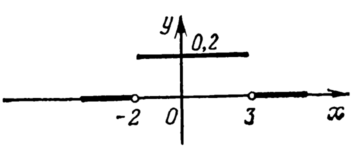


Рис. 32.

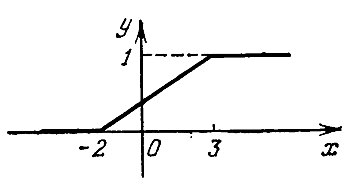


Рис. 33.

Упражнения. Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины в указанных упражнениях из п. 1:

1. Упр. 6. 2. Упр. 7. 3. Упр. 8.
4. Упр. 10. 5. Упр. 11. 6. Упр. 12.
7. Докажите формулу (13) при $f(x)=x^2$.
8. Докажите формулу (6).
9. Докажите формулу (5).

3. Моменты. В ряде исследований бывает недостаточно знания математического ожидания случайной величины и ее дисперсии. Тогда обращаются к моментам случайной величины третьего, четвертого и т. д. порядков.

Определение. *Моментом k-го порядка* случайной величины ξ называется число

$$\nu_k = M\xi^k.$$

Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется число

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k.$$

Эти определения являются непосредственными обобщениями понятий математического ожидания случайной величины и ее дисперсии. Так, математическое ожидание случайной величины есть ее момент первого порядка, а дисперсия — центральный момент второго порядка. Из определений видно, что центральные моменты можно выразить через моменты и наоборот.

Пример 1. Для случайной величины ξ с плотностью вероятностей

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$$

вычислим несколько моментов:

$$\nu_1 = M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx =$$
$$= -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

$$\nu_2 = M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx =$$
$$= -x^2 e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 2.$$

В общем случае интегрированием по частям получаем для момента k-го порядка

$$\nu_k = M\xi^k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\,dx = -x^k e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + k\int_0^{+\infty} x^{k-1}e^{-x}\,dx =$$
$$= k\nu_{k-1} = k(k-1)\,\nu_{k-2} = \ldots = k$$

Аналогично можно вычислить и центральные моменты. В этом примере случайная величина имеет моменты всех порядков. Но могут быть случаи, когда случайная величина не имеет моментов для всех номеров k, начиная с некоторого.

Пример 2. Вычислим моменты случайной величины ξ с плотностью вероятностей

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^5} & \text{при} \quad x \geqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad x < 1. \end{cases}$$

Имеем

$$\nu_k = M\xi^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x^k \frac{4}{x^5}\,dx =$$
$$= 4\int_1^{+\infty} x^{k-5}\,dx = \frac{4x^{k-4}}{k-4}\Big|_1^{+\infty} = \frac{4}{4-k}.$$

Этот расчет имеет место только при $k < 4$, в противном случае записанный интеграл расходится. Следовательно, рассматриваемая случайная величина имеет моменты первого, второго и третьего порядков, а моментов порядков четвертого и выше не имеет.

Для центрального момента третьего порядка можно дать некоторое наглядное пояснение, аналогичное тому, что математическое ожидание случайной величины характеризует некоторое ее среднее значение, а дисперсия — разброс около этого среднего значения. Центральный момент третьего порядка μ_3 характеризует некоторую симметричность относительно математического ожидания в разбросе значений случайной величины. Точнее, если $\mu_3 \neq 0$, то такой симметрии нет. Смысл высказанного утверждения состоит в следующем: если плотность вероятностей $p(x)$ случайной величины ξ симметрична относительно точки $M\xi$, т. е.

если (рис. 34)

$$p(M\xi + t) = p(M\xi - t), \qquad (1)$$

то $\mu_3 = 0$. Следовательно, если $\mu_3 \neq 0$, то такой симметрии нет, а график плотности вероятностей может иметь вид, приведенный на рис. 35.

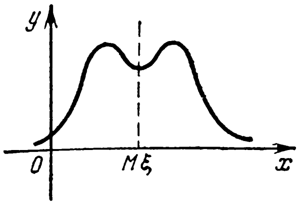


Рис. 34.

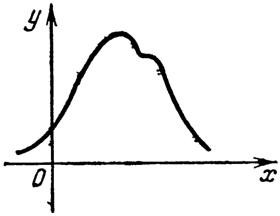


Рис. 35.

Докажем, что при выполнении равенства (1) $\mu_3 = 0$:

$$\mu_3 = M(\xi - M\xi)^3 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^3 p(x)\,dx \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 p(M\xi + t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} t^3 p(M\xi + t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} t^3 p(M\xi + t)\,dt \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \int_{+\infty}^{0} z^3 p(M\xi - z)\,dz + \int_{0}^{+\infty} t^3 p(M\xi + t)\,dt \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} -\int_{0}^{+\infty} t^3 p(M\xi - t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} t^3 p(M\xi + t)\,dt \overset{(4)}{=} 0.$$

(1) Делаем замену переменной по формулам $t = x - M\xi$, $x = M\xi + t$, $dx = dt$.

(2) В первом интеграле делаем замену переменной интегрирования по формулам $t = -z$, $dt = -dz$.

(3) В первом интеграле переменную интегрирования z обозначаем буквой t (от этого интеграл не меняется) и, кроме того, меняем местами пределы интегрирования (от этого интеграл меняет знак на противоположный).

(4) В силу равенства (1) написанные интегралы равны, и потому их разность есть нуль.

Упражнения. Вычислите моменты и центральные моменты для случайной величины ξ, если задана ее плотность вероятностей $p(x)$:

1. $$p(x)=\begin{cases} 3e^{-3x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

2. $$p(x)=\begin{cases} \dfrac{9}{x^{10}}, & x\geqslant 1,\\ 0, & x<1.\end{cases}$$

3. $$p(x)=\begin{cases} \dfrac{0{,}7}{|x|^{8}}, & |x|\geqslant 1,\\ 0{,}4, & |x|<1.\end{cases}$$

4. $p(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.

5. $$p(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{7}(2-|x|), & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0 & \text{при } x<-1 \text{ и } x>2.\end{cases}$$

6. Вычислите центральные моменты для случайной величины ξ из упр. 1 и 2.

7. Докажите равенство $\mu_3=0$ для дискретной случайной величины ξ, если ее значения расположены симметрично относительно $M\xi$ и $P(\xi=a)=P(\xi=2M\xi-a)$, т. е. симметричные относительно $M\xi$ значения принимаются с равными вероятностями.

8. Приведите пример случайной величины ξ, значения которой не симметричны относительно $M\xi$, а $\mu_3=0$.

9. Выразите центральный момент k-го порядка через моменты порядков не выше k ($k=2, 3, 4$).

4. Независимые случайные величины. Понятие о совместном распределении двух случайных величин. Для непрерывных случайных величин вероятность принять некоторое значение равна нулю. Поэтому определение независимости двух случайных величин иное, чем в дискретном случае.

Определение. Две случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если для любой пары промежутков I и J независимы события $(\xi\in I)$ и $(\eta\in J)$, т. е.

$$P((\xi\in I)\cap(\eta\in J))=P(\xi\in I)\,P(\eta\in J).$$

Основные теоремы, связанные с понятием независимости случайных величин, при этом сохраняются, но доказательства их выходят за рамки настоящего курса, и мы их не приводим.

Теорема 1. *Если случайные величины ξ и η независимы, то*

$$M(\xi\eta)=M\xi\cdot M\eta.$$

Теорема 2. *Для попарно независимых случайных величин*

$$D\left(\sum_{i=1}^{r} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{r} D\xi_i.$$

Впрочем, доказательство теоремы 2 повторяет аналогичное доказательство для дискретного случая.

Все написанное на стр. 99 относительно связи дисперсии случайной величины с ошибками измерений и определения среднего квадратичного отклонения сохраняется и в непрерывным случае.

Так же как и в дискретном случае, часто приходится рассматривать пару случайных величин, например их сумму, их произведение и т. п. Пара случайных величин $(\xi; \eta)$ есть случайная точка на плоскости. Здесь функция распределения и плотность вероятностей являются уже функциями двух переменных, и в общем случае их связь с плотностями вероятностей и функциями распределения случайных величин ξ и η не так проста. Но для независимых случайных величин все значительно проще.

Пример 1. Плотность вероятностей случайной величины ξ есть

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{при} \quad -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0 & \text{при} \quad x < -1 \text{ и } x > 2; \end{cases}$$

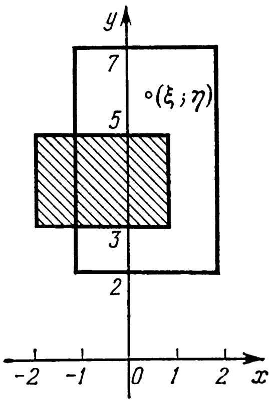


Рис. 36.

плотность вероятностей случайной величины η есть

$$p_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{при} \quad 2 \leqslant x \leqslant 7, \\ 0 & \text{при} \quad x < 2 \text{ и } x > 7. \end{cases}$$

Случайные величины ξ и η независимы. Найти вероятность того, что случайная точка $(\xi; \eta)$ попала в

1) прямоугольник $\Pi = \{(x; y) \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, 3 \leqslant y \leqslant 5\}$ (рис. 36);

2) фигуру $\Phi=\left\{(x;\ y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 2,\ 2\leqslant y\leqslant 3\sin\frac{\pi x}{2}+2\right\}$ (рис. 37).

Случайная точка $(\xi;\ \eta)$ попадает в прямоугольник П, если одновременно произошли события $(-2\leqslant\xi\leqslant 1)$ и $(3\leqslant\eta\leqslant 5)$, т. е. $((\xi;\ \eta)\in\Pi)=(-2\leqslant\xi\leqslant 1)\cap(3\leqslant\eta\leqslant 5)$

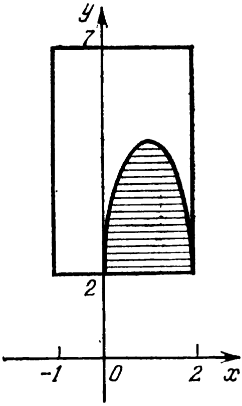


Рис. 37.

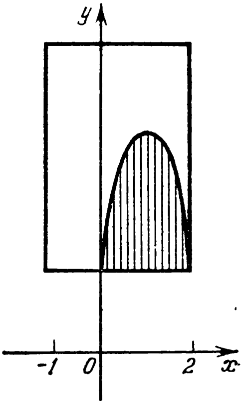


Рис. 38.

и потому, в силу независимости случайных величин ξ и η,

$$P((\xi;\ \eta)\in\Pi)=P(-2\leqslant\xi\leqslant 1)\cdot P(3\leqslant\eta\leqslant 5).$$

Вероятности же, стоящие в правой части этого равенства, мы уже можем подсчитать:

$$P(-2\leqslant\xi\leqslant 1)=\int\limits_0^1 p(x)\,dx=\int\limits_{-1}^1\frac{1}{3}\,dx=\frac{2}{3},$$

$$P(3\leqslant\eta\leqslant 5)=\int\limits_3^5 p_1(x)\,dx=\int\limits_2^5\frac{1}{5}\,dx=\frac{3}{5}.$$

Следовательно, искомая вероятность есть

$$P((\xi;\ \eta)\in\Pi)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}.$$

Для того чтобы вычислить вероятность попадания случайной точки $(\xi;\ \eta)$ в фигуру Φ, разобьем эту фигуру на вертикальные полосы $\Pi_1,\ \Pi_2,\ \ldots,\ \Pi_n$ (рис. 38).

Тогда события $(\xi \in \Pi_k)$ попарно несовместны и

$$(\xi \in \Phi) = \bigcup_{k=1}^{n} (\xi \in \Pi_k).$$

Поэтому, в силу теоремы сложения,

$$P(\xi \in \Phi) = \sum_{k=1}^{n} P(\xi \in \Pi_k).$$

Если каждую полосу Π_k приближенно заменить прямоугольником J_k (рис. 39), то

$$P(\xi \in \Pi_k) \approx P(\xi \in J_k),$$

$$P(\xi \in \Phi) \approx \sum_{k=1}^{n} P(\xi \in J_k),$$

и точность этого приближенного равенства тем больше, чем у́же полосы, т. е. предел правой части, когда ширина самой широкой полосы стремится к нулю, равен левой части. Вероятность попадания в прямоугольник J_k (эта задача нами уже решена выше) есть

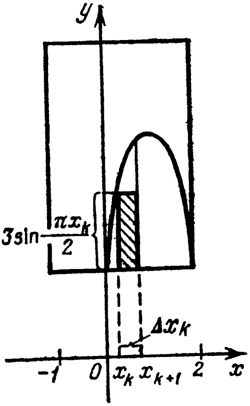


Рис. 39.

$$P(\xi \in J_k) = \frac{1}{5} 3 \sin\frac{\pi x_k}{2} \cdot \frac{\Delta x_k}{3} = \frac{1}{5} \sin\frac{\pi x_k}{2} \cdot \Delta x_k.$$

Следовательно,

$$P(\xi \in \Phi) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5} \sin\frac{\pi x_k}{2} \cdot \Delta x_k.$$

Но в правой части этого равенства стоит интегральная сумма для

$$\int_0^2 \frac{1}{5} \sin\frac{\pi x}{2}\, dx = \frac{4}{5\pi}.$$

Если ширина самой широкой полосы стремится к нулю, то наибольшее Δx_k стремится к нулю, и тогда интегральные суммы имеют пределом интеграл. Следовательно,

$$P(\xi \in \Phi) = \int_0^2 \frac{1}{5} \sin \frac{\pi x}{2}\, dx = \frac{4}{5\pi}.$$

Упражнения.

1. Случайная величина ξ имеет плотность вероятностей, равную 1/6, на отрезке [—3; 3] и 0—вне этого отрезка. Случайная величина η имеет плотность вероятностей, равную 1/4, на отрезке [0; 4] и 0—вне этого отрезка. Вычислите вероятность того, что случайная точка (ξ; η) попадет:

а) в прямоугольник $\Pi = \{(x;\ y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$;

б) в фигуру $\Phi = \left\{(x;\ y) \mid |x| \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant 3\cos x\right\}$;

в) в круг радиуса 2 с центром в точке (0; 2);

г) в фигуру $K = \{(x;\ y) \mid |x| < 1;\ |y| < 1\}$.

2. Случайная величина ξ имеет плотность вероятностей, равную 0,1, на отрезке [—2; 8] и 0—вне этого отрезка. Случайная величина η имеет плотность вероятностей, равную 1/7, на отрезке [—2; 5] и 0—вне этого отрезка. Вычислите вероятность того, что случайная точка (ξ; η) попала:

а) в прямоугольник $\Pi = \{(x;\ y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 10,\ -7 \leqslant y \leqslant 2\}$;

б) в фигуру $\Phi = \{(x;\ y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 3x - x^2\}$;

в) в круг радиуса 3 с центром в точке (1; 1);

г) в фигуру $K = \{(x;\ y) \mid |x| < 3,\ |y| < 1\}$.

§ 7. Основные законы распределения

1. Равномерное распределение. Если плотность вероятностей случайной величины ξ постоянна на некотором отрезке и равна нулю вне этого отрезка, то случайная величина ξ называется *равномерно распределенной* на этом отрезке.

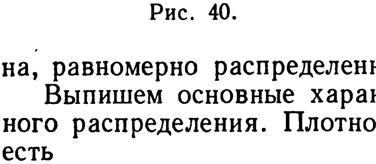


Рис. 40.

Например, координата точки, брошенной наудачу на отрезок, есть случайная величина, равномерно распределенная на этом отрезке.

Выпишем основные характеристики для равномерного распределения. Плотность вероятностей (рис. 40) есть

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 & \text{при} \quad x < a \text{ и } x > b. \end{cases}$$

Надо только проверить, что выполнено требование теоремы 7 из п. 1 § 6:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx + \int_{a}^{b} p(x)\,dx + \int_{b}^{+\infty} p(x)\,dx =$$
$$= \int_{a}^{b} \frac{dx}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Функция распределения находится по промежуткам: при $x \leqslant a$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx = 0;$$

при $x \geqslant b$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx + \int_{a}^{b} p(x)\,dx + \int_{b}^{x} p(x)\,dx =$$
$$= \int_{a}^{b} \frac{dx}{b-a} = 1;$$

при $a < x < b$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx + \int_{a}^{x} p(x)\,dx =$$
$$= \int_{a}^{x} \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$

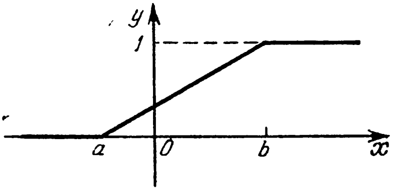


Рис. 41.

Итак (рис. 41),

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a < x < b, \\ 1 & \text{при} \quad b \leqslant x. \end{cases}$$

Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины есть

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{a} xp(x)\,dx+\int_{a}^{b} xp(x)\,dx+\int_{b}^{+\infty} xp(x)\,dx=$$

$$=\int_{a}^{b}\frac{x\,dx}{b-a}=\frac{x^2|_a^b}{2(b-a)}=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}.$$

То есть математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной на отрезке, есть середина этого отрезка.

Дисперсия равномерно распределенной случайной величины есть

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2p(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{a}(x-m)^2p(x)\,dx+\int_{a}^{b}(x-m)^2p(x)\,dx+$$

$$+\int_{b}^{+\infty}(x-m)^2p(x)\,dx=\int_{a}^{b}\frac{(x-m)^2}{b-a}\,dx=\left.\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3(b-a)}\right|_a^b=$$

$$=\frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3(b-a)}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Упражнения. Для случайной величины ξ, распределенной равномерно на отрезке $[a;\ b]$, выпишите плотность вероятностей и функцию распределения (и сделайте рисунки), найдите математическое ожидание и дисперсию, если задан отрезок:
1. $[-3;\ 7]$. **2.** $[1;\ 5]$. **3.** $[-8;\ -2]$. **4.** $[2{,}1;\ 2{,}3]$.

2. Биномиальное распределение. Дискретная случайная величина ξ, которая может принимать только целые неотрицательные значения с вероятностями

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$
$$p+q=1,\ p\geqslant 0,\ q\geqslant 0,\ k=0, 1, \ldots, n,$$

называется *распределенной по биномиальному закону.*

Такая случайная величина возникает в схеме Бернулли (см. § 4, п. 1): это число опытов, в которых произошло событие A. Покажем, что математическое ожидание случайной величины ξ, распределенной по биномиальному закону, есть

$$M\xi = np.$$

Действительно (при выводе мы воспользуемся формулой (5) из п. 2 § 4), по определению математического ожидания (§ 5, п. 2, формула (1))

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = np.$$

Покажем, что для случайной величины, распределенной по биномиальному закону, дисперсия есть

$$D\xi = npq.$$

При выводе мы воспользуемся формулой из упр. 2 к § 5, п. 4 и формулой (6) из § 4, п. 2:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - (np)^2 =$$
$$= npq + n^2p^2 - n^2p^2 = npq.$$

Упражнения. Найдите математическое ожидание и дисперсию для случайной величины, распределенной по биномиальному закону, если:

1. $n = 10$, $p = 0{,}4$.
2. $n = 30$, $p = 0{,}1$.
3. $n = 100$, $q = 0{,}2$.
4. $n = 50$, $q = 0{,}8$.

3. Закон Пуассона. Дискретная случайная величина ξ, которая может принимать только целые неотрицательные значения с вероятностями

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \qquad k = 0, 1, \ldots, a > 0,$$

называется *распределенной по закону Пуассона* с параметром a (рис. 42, точки с общим a соединены).

В отличие от биномиального распределения, здесь случайная величина уже может принимать бесконечное число значений. Такое распределение получается в схеме Бернулли (см. § 4, п. 1) при больших n и малых p. Подробнее об этом сказано ниже.

Покажем, что для случайной величины ξ, распределенной по закону Пуассона,

$$M\xi = a,$$
$$D\xi = a.$$

При выводе этих формул мы воспользуемся известным из курса математического анализа равенством

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{1}$$

По определению математического ожидания

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} e^{-a} = ae^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = ae^{-a} \cdot e^a = a$$

(это непосредственное обобщение формулы, использованной в п. 2). Здесь первое слагаемое при $k=0$ равно

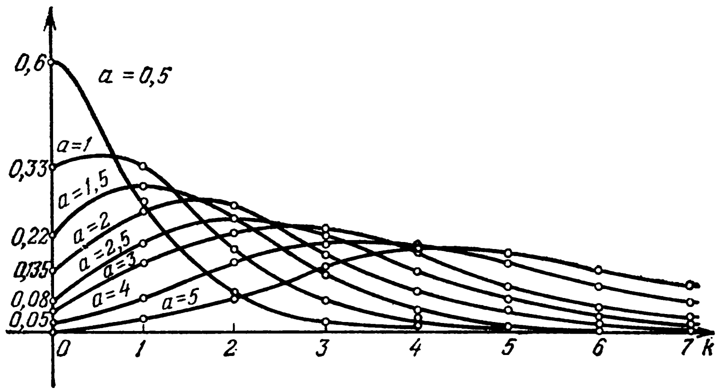


Рис. 42.

нулю. Общий множитель во всех слагаемых ae^{-a} можно вынести за знак суммы, после чего остается сумма, записанная в правой части равенства (1).

Вывод формулы для дисперсии начнем с вычисления $M\xi^2$:

$$M\xi^2=\sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{a^k}{k!}e^{-a}=\sum_{k=0}^{\infty}(k(k-1)+k)\frac{a^k}{k!}e^{-a}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{a^k}{k!}e^{-a}+\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{a^k}{k!}e^{-a}=$$

$$=\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a^{k-2}}{(k-2)!}\right)e^{-a}a^2+a=e^a\cdot e^{-a}\cdot a^2+a=a^2+a.$$

При вычислении мы воспользовались тем, что вторая сумма есть $M\xi=a$, а в первой сумме первое и второе слагаемые (при $k=0$ и $k=1$) равны нулю. Тогда во всех слагаемых первой суммы есть общий множитель $e^{-a}a^2$, который выносится за знак суммы. Оставшаяся сумма (после сокращения во всех слагаемых числителя и знаменателя на $k(k-1)$) уже вычисляется по формуле (1).

Теперь легко получается формула

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=a^2+a-a^2=a.$$

Покажем, наконец, что в вычислениях по формуле Бернулли при малых вероятностях p лучше пользоваться не приближенной формулой Лапласа, а приближенной формулой Пуассона, где $a=np$. В самом деле, предположим, что испытания по схеме Бернулли проводятся так, что интересующее нас событие имеет очень малую вероятность. Это означает, что при n опытах вероятность этого события равна $p=\frac{a}{n}$. Тогда формула Бернулли может быть переписана в виде

$$P_{m,n}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}=$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{a^m}{m!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-m+1}{n}\,\frac{\left(1-\frac{a}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{a}{n}\right)^m}\approx\frac{a^m}{m!}e^{-a}$$

для достаточно больших n. Действительно, поскольку

$$\lim\left(1-\frac{a}{n}\right)^n=\lim\left(\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-n/a}\right)^{-a}=$$
$$=\left(\lim\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-n/a}\right)^{-a}=e^{-a},$$

то $\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\approx e^{-a}$ при достаточно больших n; а так как

$$\lim\left(1-\frac{a}{n}\right)^m=1,\ \lim\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-m+1}{n}=1,$$

то $\left(1-\frac{a}{n}\right)^m\approx 1$, $\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-m+1}{n}\approx 1$ при достаточно больших n.

Таким образом, при больших n и малых p получаем приближенную формулу Пуассона:

$$P_{m,n}\approx\frac{(pn)^m}{m!}e^{-np}. \qquad (2)$$

Отметим еще одно важное свойство случайных величин.

Теорема 1. *Сумма независимых случайных величин, каждая из которых распределена по закону Пуассона, тоже распределена по закону Пуассона.*

В самом деле, пусть случайная величина ξ распределена по закону Пуассона с параметром a, а случайная величина η распределена по закону Пуассона с параметром b, т. е.

$$P(\eta=m)=\frac{b^m}{m!}e^{-b},$$

и случайные величины ξ и η независимы. Тогда случайные события $(\xi=k)$ и $(\eta=m-k)$ независимы при любых целых неотрицательных числах m и k, $0\leqslant k\leqslant m$. Поэтому

$$P((\xi=k)\cap(\eta=m-k))=P(\xi=k)\,P(\eta=m-k)=$$
$$=\frac{a^kb^{m-k}}{k!\,(m-k)!}e^{-(a+b)}$$

и по формуле полной вероятности

$$P(\xi+\eta=m)=\sum_{k=0}^{m} P(\xi=k)\cdot P(\eta=m-k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{a^k b^{m-k}}{k!\,(m-k)!}e^{-(a+b)}=\frac{e^{-(a+b)}}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!\,a^k b^{m-k}}{k!\,(m-k)!}=$$

$$=\frac{e^{-(a+b)}}{m!}(a+b)^m.$$

При вычислениях мы сначала общий множитель $e^{-(a+b)}$ вынесли за знак суммы, а потом умножили и разделили все слагаемые на $m!$ А так как $\frac{m!}{k!\,(m-k)!}=C_m^k$ (биномиальный коэффициент), то получившаяся сумма по формуле Ньютона дает $(a+b)^m$.

Таким образом,

$$P(\xi+\eta=m)=\frac{(a+b)^m}{m!}e^{-(a+b)},$$

т. е. случайная величина $\xi+\eta$ распределена по закону Пуассона с параметром $a+b$.

Для любого числа слагаемых это свойство доказывается по индукции.

Упражнения. Для случайной величины ξ, распределенной по закону Пуассона, вычислите $P(\xi=k)$, математическое ожидание и дисперсию, если:

1. $a=0{,}3$, $k=2$, $k=10$.
2. $a=4$, $k=3$, $k=7$.
3. $a=1{,}2$, $k=2$, $k=12$.
4. $a=0{,}7$, $k=3$, $k=20$.

Проведено n независимых испытаний по схеме Бернулли. В каждом испытании может произойти событие A с вероятностью p. Подсчитайте приближенно по формуле Пуассона вероятность того, что при этом событие A произошло k раз, если:

5. $n=1000$, $p=0{,}002$, $k=10$, $k=5$.
6. $n=2000$, $p=0{,}0015$, $k=20$, $k=3$.
7. $n=2500$, $p=0{,}0004$, $k=10$, $k=2$.
8. $n=20\,000$, $p=0{,}0002$, $k=10$, $k=15$.

Случайная величина ξ распределена по закону Пуассона с параметром a, случайная величина η распределена по закону Пуассона с параметром b, и эти случайные величины независимы. Найдите закон распределения их суммы, если:

9. $a=0{,}3$, $b=1{,}2$.
10. $a=1{,}7$, $b=2{,}1$.
11. $a=5$, $b=2$.

Независимые случайные величины ξ, η и ζ распределены по закону Пуассона с параметрами a, b и c (соответственно). Найдите закон распределения их суммы, если:

12. $a=1{,}2$, $b=2{,}3$, $c=0{,}7$.

13. $a=0{,}2$, $b=1{,}5$, $c=0{,}6$.

14. $a=2{,}1$, $b=0{,}3$, $c=5$.

15. Независимые случайные величины ξ, η и ζ распределены по закону Пуассона ($M\xi=a$, $M\eta=b$, $M\zeta=c$). Найдите закон распределения их суммы и $M(\xi+\eta+\zeta)$.

16. Независимые случайные величины ξ_k, $k=1, 2, \ldots, m$, распределены по закону Пуассона $M\xi_k=a_k$. Запишите закон распределения для их суммы.

4. Нормальный закон распределения Гаусса. Непрерывная случайная величина ξ называется *распределенной по нормальному закону Гаусса*, если ее плотность вероятностей есть

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma>0. \tag{1}$$

Нормальное распределение появляется в схеме Бернулли при больших n (см. § 4, п. 3). Обычно употребляется обозначение

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \tag{2}$$

и таблицы приводятся именно для значений функции φ (см. приложение 6). Это четная, неотрицательная и

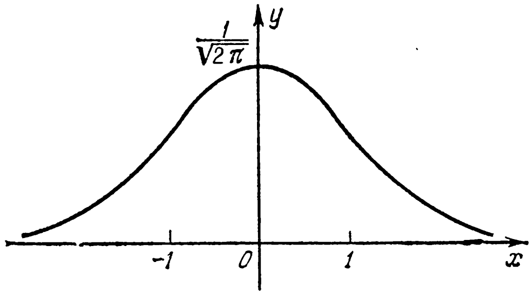


Рис. 43.

стремящаяся к нулю при $x\to\infty$ функция (рис. 43). При помощи этой функции плотность вероятностей случайной величины, распределенной по нормальному закону, можно записать так:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \qquad (3)$$

В приложении 6 доказано, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = 1. \qquad (4)$$

Нам потребуются еще интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\, dx = 0, \qquad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)\, dx = 1. \qquad (6)$$

Равенство (5) следует из того, что подынтегральная функция нечетная. Для получения равенства (6) проведем интегрирование по частям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\, d\left(-\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x e^{-\frac{x^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1.$$

Покажем, что математическое ожидание нормально распределенной случайной величины ξ с плотностью вероятностей (1) есть

$$M\xi = a.$$

По определению математического ожидания

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) dx \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + a)\varphi(t)\, dt =$$

$$= \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\, dt + a \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt \overset{(2)}{=} a.$$

(1) Делаем замену переменной по формулам $t=\frac{x-a}{\sigma}$, $dt=\frac{dx}{\sigma}$.

(2) В силу формул (4) и (5).

Теперь покажем, что для нормально распределенной случайной величины с плотностью вероятностей (1) дисперсия есть

$$D\xi=\sigma^2. \tag{7}$$

Дисперсию подсчитаем по формуле (12) из § 6, п. 2, учитывая, что $m=M\xi=a$:

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)dx\overset{(1)}{=}\sigma^2\int_{\infty}^{+\infty}t^2\varphi(t)\,dt\overset{(2)}{=}\sigma^2.$$

(1) Делаем замену переменной по формулам $t=\frac{x-a}{\sigma}$, $dt=\frac{dx}{\sigma}$.

(2) В силу формулы (6).

Таким образом, параметры a и σ в плотности вероятностей нормального распределения (1) или (3) имеют простой вероятностный смысл: a есть математическое ожидание нормально распределенной случайной величины, а σ^2 — ее дисперсия.

Остается выписать функцию распределения нормально распределенной случайной величины. Для этого принято пользоваться функцией

$$\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)\,dt,$$

для которой и приводятся таблицы (см. приложение 6). Докажем, что

$$\Phi(-x)=-\Phi(x), \tag{8}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=\frac{1}{2}. \tag{9}$$

Доказательство равенства (8):

$$\Phi(-x)=\int_0^{-x}\varphi(t)\,dt\overset{(1)}{=}-\int_0^x\varphi(-z)\,dz\overset{(2)}{=}-\int_0^x\varphi(z)\,dz=$$
$$=-\Phi(x).$$

(1) Делаем замену переменной по формулам $z = -t$, $-dz = dt$.

(2) В силу четности функции φ.

Доказательство формулы (9) следует из определения несобственного интеграла:

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \varphi(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Функцию распределения случайной величины выписываем, пользуясь теоремой 8 из § 6, п. 1:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)dx \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} \varphi(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt + \int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} \varphi(t)\,dt \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

(1) Делаем замену переменной по формулам $t = \frac{x-a}{\sigma}$, $dt = \frac{dx}{\sigma}$; при этом верхний предел интегрирования будет равен $\frac{x-a}{\sigma}$.

(2) В силу четности функции φ и определения функции Φ.

Итак, функция распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону (1) или (3), есть

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

На рис. 44 и 45 приведены графики плотности вероятностей функции распределения для случайных величин, распределенных по нормальному закону, при различных σ. Для плотности вероятностей характерно, что с уменьшением σ график делается у́же и вытягивается вдоль прямой $x = a = M\xi$. График функции распределения при любом σ проходит через точку (a; 0,5) и с уменьшением σ идет круче через эту точку.

Особенно важно в практических приложениях правило «трех сигм»:

$$P(|\xi - a| \geqslant 3\sigma) = 0{,}0027,$$

т. е. вероятность того, что нормально распределенная случайная величина отличается от своего математического ожидания больше чем на 3σ, приблизительно

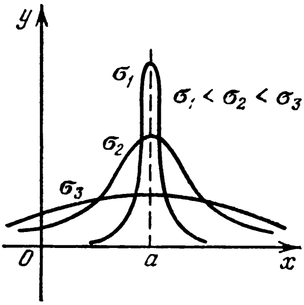


Рис. 44.

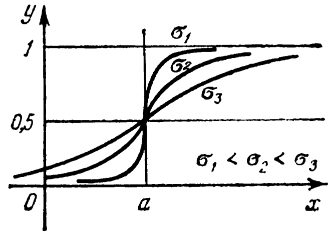


Рис. 45.

равна $\frac{1}{4}$ %. Поэтому такое событие считается практически невозможным.

Независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону, имеют сумму, также распределенную по нормальному закону. Доказательство этого факта сложно и выходит за рамки данного курса.

Нормальное распределение играет особую роль в теории вероятностей. Причина этого будет выяснена в § 8.

Упражнения. Запишите функцию распределения и плотность вероятностей для нормально распределенной случайной величины, если:

1. $M\xi = 3$, $D\xi = 4$.
2. $M\xi = -1$, $D\xi = 9$.
3. $M\xi = 0$, $D\xi = 1$.
4. $M\xi = -2$, $D\xi = \sqrt{3}$.

Определите закон распределения, найдите $M\xi$, $D\xi$ и функцию распределения для случайной величины ξ, если ее плотность вероятностей есть:

5. $p(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/50}$.

6. $p(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{-(x+2)^2/18}$.

7. $p(x)=\frac{1}{\sqrt{7\pi}}e^{-(x+1)^2/7}$.

Для нормально распределенной случайной величины ξ найти:

8. $P(12<\xi<14)$ и $P(8<\xi<12)$, если $M\xi=10$, $D\xi=4$.

9. $P(15<\xi<25)$ и $P(5<\xi<15)$, если $M\xi=20$, $\sqrt{D\xi}=5$.

10. $P(0<\xi<6)$ и $P(1<\xi<5)$, если $M\xi=3$, $D\xi=16$.

11. $P(-10<\xi<0)$ и $P(-5<\xi<5)$ если $M\xi=-5$, $\sqrt{D\xi}=2$.

12. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону с $\sigma=10$ мм. Найдите вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой не превосходящей 15 мм, не превосходящей 20 мм.

13. При взвешивании получается ошибка, подчиненная нормальному закону с $\sigma=20$ г. Найдите вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей 10 г, не превосходящей 40 г, не превосходящей 30 г.

14. Автомат изготовляет подшипники, которые считаются годными, если отклонение ξ от проектного размера по модулю не превосходит 0,77 мм. Каково наиболее вероятное число годных подшипников из ста, если ξ распределено нормально с $\sigma=0{,}4$ мм?

Случайная величина ξ распределена нормально. Найдите:

15. $P(0<\xi<10)$, если $M\xi=10$ и $P(10<\xi<20)=0{,}3$.

16. $P(35<\xi<40)$, если $M\xi=25$ и $P(10<\xi<15)=0{,}2$.

17. $P(1<\xi<4)$. если $M\xi=3$ и $P(3<\xi<5)=0{,}1915$.

18. Найдите такое h, что случайная величина ξ не попадает в интервал $(a-h;\ a+h)$ с вероятностью 0,0027.

19. Станок-автомат изготовляет валики, контролируя их диаметры ξ. Считая, что ξ распределена нормально, $a=10$ мм, $\sigma=0{,}1$ мм, найдите интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

20. Для случайной величины ξ, распределенной по нормальному закону, найдите:

а) $P(|\xi-a|<\sigma)$;

б) $P(|\xi-a|<2\sigma)$;

в) $P(|\xi-a|<3\sigma)$;

г) $P(|\xi-a|<4\sigma)$.

21. Независимые случайные величины ξ и η распределены нормально, $M\xi=2$, $D\xi=4$, $M\eta=-3$, $D\eta=9$. Запишите плотность вероятностей и функцию распределения их суммы.

22. Независимые случайные величины ξ и η распределены нормально, $M\xi=-1$, $D\xi=2$, $M\eta=5$, $D\eta=7$. Запишите плотность вероятностей и функцию распределения их суммы.

23. Независимые случайные величины ξ и η распределены нормально и $M\xi=-5$, $D\xi=3$, $M\eta=4$, $D\eta=1$. Запишите плотность вероятностей и функцию распределения их суммы.

24. Независимые случайные величины ξ, η и ζ распределены нормально и $M\xi=3$, $D\xi=4$; $M\eta=-2$, $D\eta=0{,}04$; $M\zeta=1$, $D\zeta=0{,}09$. Запишите для их суммы плотность вероятностей и функцию распределения. Найдите $P(\xi+\eta+\zeta<5)$ и $P(-1<\xi+\eta+\zeta<3)$.

25. Независимые случайные величины ξ, η и ζ распределены нормально и $M\xi=-1$, $D\xi=9$; $M\eta=2$, $D\eta=4$; $M\zeta=-3$, $D\zeta=0{,}64$.

Запишите для их суммы плотность вероятностей и функцию распределения. Найдите $P(\xi+\eta+\zeta<0)$ и $P(-3<\xi+\eta+\zeta<0)$.

26. Независимые случайные величины ξ_k, $k=1, 2, \ldots, n$, распределены нормально и $M\xi_k=m_k$, $D\xi_k=\sigma_k^2$. Запишите для их суммы плотность вероятностей и функцию распределения. Найдите $P\left(a<\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k<b\right)$.

5. Показательное распределение. Случайная величина ξ называется *распределенной по показательному закону*, если ее плотность вероятностей есть

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0,\end{cases}\qquad \lambda>0.$$

Вычислим математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения для этой случайной величины:

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}xp(x)\,dx+\int_{0}^{+\infty}xp(x)\,dx=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}\,dx=-\int_{0}^{+\infty}xe^{-\lambda x}\,d(-\lambda x)=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+$$

$$+\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}\,dx=-\frac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}\,d(-\lambda x)=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=$$

$$=0+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda};$$

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2p(x)\,dx+$$

$$+\int_{0}^{+\infty}\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2p(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx=$$

$$=-\int_{0}^{+\infty}\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2d(e^{-\lambda x})=-\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+$$

$$+2\int_{0}^{+\infty}\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda}\int_{0}^{+\infty}\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)d(e^{-\lambda x})=$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda}\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\frac{2}{\lambda}\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda^2}\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}\,d(-\lambda x)=-\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda^2};$$

$F(x)=0$ при $x<0$, а при $x \geqslant 0$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} p(x)\,dx+\int_{0}^{x} p(t)\,dt=$$

$$=0+\int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,dt=-\int_{0}^{x} e^{-\lambda t}\,d(-\lambda t)=-e^{-\lambda t}\Big|_{0}^{x}=1-e^{-\lambda x}.$$

Таким образом,

$$M\xi=\frac{1}{\lambda},\quad D\xi=\frac{1}{\lambda^2},\quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Упражнения. По какому закону распределена случайная величина ξ и чему равны ее математическое ожидание, дисперсия и функция распределения, если плотность вероятностей этой случайной величины есть:

1. $p(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0;\end{cases}$
2. $p(x)=\begin{cases}0{,}1e^{-0{,}1x} & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0;\end{cases}$
3. $p(x)=\begin{cases}25e^{-25x} & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0?\end{cases}$

§ 8. Предельные теоремы теории вероятностей

1. Неравенство Чебышева. Мы переходим к группе теорем, которые устанавливают связь между изложенной выше теорией и практикой. С простейшими из них вы уже познакомились в § 4 (теорема Бернулли и формулы Лапласа). Теперь вы познакомились с более общими теоремами. В доказательстве важную роль будет играть неравенство Чебышева.

Теорема 1. *Для любого положительного числа a и случайной величины ξ справедливо неравенство*

$$P(|\xi-M\xi|\geqslant a)<\frac{D\xi}{a^2}.$$

Доказательство проведем отдельно для дискретной случайной величины (мы ограничимся случаем конечного множества значений случайной величины) и для непрерывной.

Пусть непрерывная случайная величина ξ имеет плотность вероятностей $p(x)$. Тогда

$$P(|\xi-M\xi|\geqslant a)\overset{(1)}{=}1-P(|\xi-M\xi|<a)\overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=}1-\int_{M\xi-a}^{M\xi+a}p(x)\,dx\overset{(3)}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx-\int_{m-a}^{m+a}p(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{m-a}p(x)\,dx+\int_{m-a}^{m+a}p(x)\,dx+\int_{m+a}^{+\infty}p(x)\,dx-\int_{m-a}^{m+a}p(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{m-a}p(x)\,dx+\int_{m+a}^{+\infty}p(x)\,dx\overset{(4)}{<}$$

$$\overset{(4)}{<}\int_{-\infty}^{m-a}\left(\frac{x-m}{a}\right)^2p(x)\,dx+\int_{m+a}^{+\infty}\left(\frac{x-m}{a}\right)^2p(x)\,dx\overset{(5)}{\leqslant}$$

$$\overset{(5)}{\leqslant}\int_{-\infty}^{m-a}\left(\frac{x-m}{a}\right)^2p(x)\,dx+\int_{m-a}^{m+a}\left(\frac{x-m}{a}\right)^2p(x)\,dx+$$

$$+\int_{m+a}^{+\infty}\left(\frac{x-m}{a}\right)^2p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-m}{a}\right)^2p(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2p(x)\,dx\overset{(6)}{=}\frac{D\xi}{a^2}.$$

(1) События $(|\xi-M\xi|\geqslant a)$ и $(|\xi-M\xi|<a)$ противоположные, и мы пользуемся теоремой 3 из § 2, п. 3.

(2) Выписываем вероятность события $(M\xi-a<\xi<$ $<M\xi+a)=(|\xi-M\xi|<a)$, пользуясь теоремой 6 из § 6, п. 1.

(3) Единицу заменяем интегралом по теореме 7 из § 6, п. 1; $m=M\xi$.

(4) В первом интеграле переменная интегрирования есть $x<m-a$, и потому $x-m<-a$ и $\left(\frac{x-m}{a}\right)^2>1$. Если под знаком интеграла положительную функцию $p(x)$ умножим на $\left(\frac{x-m}{a}\right)^2$, то получим $p(x)<\left(\frac{x-m}{a}\right)^2p(x)$, и потому первый интеграл в правой части неравенства больше, чем первый интеграл в левой части этого неравенства. Аналогично и для вторых интегралов: на

промежутке интегрирования $x > m+a$, т. е. $x-m > a$, и потому $\left(\frac{x-m}{a}\right)^2 > 1$. Следовательно, $p(x) < p(x) \times \left(\frac{x-m}{a}\right)^2$ и второй интеграл в правой части неравенства больше второго интеграла в левой части этого неравенства.

(5) Добавляется неотрицательное слагаемое $\int\limits_{m-a}^{m+a} \left(\frac{x-m}{a}\right)^2 p(x)\,dx$, так как подынтегральная функция $\left(\frac{x-m}{a}\right)^2 p(x) \geqslant 0$ и $m-a < m+a$.

(6) По определению дисперсии и формуле (12) из § 6, п. 2.

Таким образом, для случая непрерывных случайных величин неравенство Чебышева доказано.

Для дискретной случайной величины доказательство аналогично. Пусть случайная величина ξ принимает значения a_k с вероятностями

$$P(\xi = a_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда события $(\xi = a_k)$ попарно несовместны (мы будем предполагать, что все числа a_k различны), а интересующее нас событие есть

$$(|\xi - M\xi| \geqslant a) = \bigcup_{k;\ |a_k - M\xi| \geqslant a} (\xi = a_k),$$

где в объединение входят события только с такими номерами k, для которых выполнено неравенство $|a_k - M\xi| \geqslant a$ (это указано внизу). Так как события попарно несовместны, то по теореме сложения (теорема 2 из § 2, п. 3) имеем

$$P(|\xi - M\xi| \geqslant a) \overset{(1)}{=} \sum_{k,\ |a_k - M\xi| \geqslant a} P(\xi = a_k) =$$

$$= \sum_{k,\ |a_k - M\xi| \geqslant a} p_k \overset{(2)}{\leqslant} \sum_{k,\ |a_k - M\xi| \geqslant a} \left(\frac{a_k - M\xi}{a}\right)^2 p_k \overset{(3)}{\leqslant}$$

$$\overset{(3)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k - M\xi}{a}\right)^2 p_k \overset{(4)}{=} M\left(\frac{\xi - M\xi}{a}\right)^2 \overset{(5)}{=} \frac{1}{a^2} M(\xi - M\xi)^2 \overset{(6)}{=} \frac{D\xi}{a^2}.$$

(1) В сумму входят только те слагаемые, для которых k удовлетворяет условию $|a_k - M\xi| \geqslant a$ (написанному под знаком суммы).

(2) Так как $|a_k - M\xi| \geqslant a$, то $\left(\frac{a_k - M\xi}{a}\right)^2 \geqslant 1$ и потому $p_k \leqslant \left(\frac{a_k - M\xi}{a}\right)^2 p_k$, т. е. слагаемые, стоящие в сумме слева, меньше слагаемых, стоящих в сумме справа (с одинаковыми номерами k).

(3) Теперь берем слагаемые уже со всеми возможными номерами k (без всяких ограничений); поскольку слагаемые неотрицательные могут добавиться, то сумма не уменьшится.

(4) По определению математического ожидания.

(5) Выносим постоянный множитель.

(6) По определению дисперсии.

Таким образом, неравенство Чебышева доказано и для дискретных случайных величин. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть случайная величина ξ имеет $D\xi = 0{,}001$. Какова вероятность того, что она отличается от $M\xi$ более чем на $0{,}1$?

По неравенству Чебышева

$$P(|\xi - M\xi| \geqslant 0{,}1) < \frac{D\xi}{0{,}1^2} = \frac{0{,}001}{0{,}01} = 0{,}1.$$

Пользуясь неравенством Чебышева, несложно доказать теорему Бернулли — достаточно доказать неравенство (9) из § 4, п. 2. Для этого рассмотрим в схеме Бернулли случайные величины

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м опыте событие } A \text{ произошло,} \\ 0, & \text{если в } i\text{-м опыте событие } A \text{ не произошло.} \end{cases}$$

Так как опыты проводятся независимо, то случайные величины независимы. Далее, $P(\xi_i = 1) = P(A) = p$ и $P(\xi_i = 0) = P(\overline{A}) = 1 - p = q$ для всех i. Тогда частота появления события A в n опытах есть

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

В силу примера 3 из § 5, п. 2

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = p,$$

а из примера 2 § 5, п. 2 следует, что

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\frac{pq}{n}.$$

Таким образом, по неравенству Чебышева

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a\right)=P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-p\right|\geqslant a\right)<\frac{pq}{a^2n},$$

и требуемое неравенство доказано.

Упражнения.

1. Случайная величина ξ имеет дисперсию $D\xi=0{,}004$. Найдите вероятность того, что случайная величина отличается от $M\xi$ более чем на 0,2.

2. Для случайной величины ξ известна дисперсия $D\xi=0{,}009$ и неравенство

$$P(|\xi-M\xi|\geqslant a)<0{,}1.$$

Найдите число a.

3. Для случайной величины ξ известна дисперсия $D\xi=0{,}01$ и неравенство $P(|\xi-M\xi|<a)>0{,}96$. Найдите a.

2. Теорема Чебышева. Обобщением теоремы Бернулли является теорема Чебышева.

Теорема (Чебышева). *Если случайные величины* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ *попарно независимы и* $D\xi_k\leqslant C$ *для всех* k, *то при любом* $a>0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|\geqslant a\right)=0.$$

Доказательство. Вычислим математическое ожидание среднего арифметического:

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k.$$

Теперь, пользуясь попарной независимостью случайных величин, вычислим дисперсию среднего арифметического:

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_n\leqslant\frac{1}{n^2}Cn=\frac{C}{n}.$$

Тогда, записав неравенство Чебышева для среднего арифметического, получаем (пользуясь сделанными сейчас вычислениями)

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|\geqslant a\right)=$$
$$=P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\right|\geqslant a\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{a^2}D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\leqslant\frac{C}{a^2n}.$$

Таким образом, получено неравенство

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|\geqslant a\right)\leqslant\frac{C}{a^2n}. \tag{1}$$

Но вероятность любого события неотрицательна (по определению). Следовательно,

$$0\leqslant P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|\geqslant a\right)\leqslant\frac{C}{a^2n}.$$

Отсюда, в силу теоремы о промежуточной функции, получаем

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|\geqslant a\right)=0.$$

Наглядный смысл теоремы Чебышева состоит в следующем: для всех достаточно больших n неравенство

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|\geqslant a$$

имеет малую вероятность и потому неравенство

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|< a \tag{2}$$

имеет вероятность, близкую к единице; говорят, что событие, состоящее в том, что выполнено неравенство

(2), практически достоверно для всех больших n. Следовательно, с любой степенью точности (т. е. с точностью до произвольно выбранного числа $a > 0$) для всех достаточно больших n практически достоверно приближенное равенство

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k. \tag{3}$$

Тут мы имеем дело с событиями, вероятности которых могут быть произвольно малыми. На практике приходится пренебрегать не только невозможными событиями, но и событиями, вероятности которых малы. Например, в каких-то рассуждениях мы пренебрегаем событиями, вероятности которых меньше 0,01. При этом говорят, что рассуждения проведены с надежностью в 0,99 или с надежностью в 99%. Так, если надежность рассуждений равна 98%, то это значит, что пренебрегают в рассуждении событиями, вероятность которых меньше 0,02. Про события, которыми пренебрегают, говорят, что они практически невозможны. События, противоположные практически невозможным, называют практически достоверными. Так, в рассуждениях, проведенных с надежностью в 99,5%, практически достоверные события имеют вероятность больше 0,995.

Пользуясь этой терминологией, теорему Чебышева можно сформулировать так: если дисперсии попарно независимых случайных величин ограничены, то с любой точностью и надежностью выполнено приближенное равенство (3) для всех достаточно больших n.

Неравенство (1) дает также возможность установить связь между точностью и надежностью приближенного равенства (3), с одной стороны, и числом слагаемых n — с другой.

Пример 1. Сколько слагаемых надо взять в теореме Чебышева, чтобы с надежностью в 96% и точностью до 0,01 выполнялось приближенное равенство (3), считая, что $C = 1$?

В этом примере число $a = 0{,}01$ (в обозначениях теоремы) есть заданная точность приближенного равенства. Чтобы получить требуемую надежность в 96%, достаточно подобрать n удовлетворяющим неравенству (см. неравенство (1))

$$\frac{C}{a^2 n} \leqslant 0{,}04 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1}{0{,}04 \cdot 0{,}0001} = 250\,000.$$

Как видите, даже для не очень большой точности (два знака) и не очень большой надежности (всего 96%) нужно уже очень много слагаемых. Правда, надо иметь в виду, что связь, устанавливаемая неравенством (1), очень грубая, а получающиеся из нее оценки сильно завышены. Более тонкие оценки можно получить при помощи теоремы из п. 3.

Остановимся еще на приближенных вычислениях и их связи с теоремой Чебышева. Представьте себе, что вы измеряете деталь длины l. При каждом измерении неизбежны ошибки. Все эти случайные ошибки (будем предполагать, что систематических ошибок при измерении не допускается) приводят к тому, что в результате n измерений вы получаете серию из n случайных чисел (величин) $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Естественно, что все измерения делаются независимо друг от друга, т. е. случайные величины ξ_i получаются независимыми. Математическое ожидание каждой случайной величины $M\xi_i$ равно l, т. е. той длине детали, которую измеряют. Ясно, что при измерениях ошибки ограничены, и потому ограничены дисперсии. Следовательно, поскольку

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\xi_i = l,$$

неравенство (1) позволяет оценить связь между точностью, надежностью и числом сделанных измерений:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - l\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{C}{a^2 n},$$

и тем самым оценить погрешность приближенного равенства

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \approx l.$$

Здесь тоже надо иметь в виду, что получающиеся оценки очень завышены. Более точные оценки получаются из теоремы п. 3.

Упражнения.

1. С какой надежностью среднее арифметическое измерений дает измеряемую величину, если сделано 500 измерений с точностью 0,1 и дисперсии случайных величин (результатов измерений) не превосходят 0,3?

2. С какой точностью среднее арифметическое измерений дает измеряемую величину, если измерений сделано 400, надежность результата составляет 80% и дисперсии случайных величин (результатов измерений) не превосходят 0,04?

3. Сколько измерений надо сделать, чтобы их среднее арифметическое дало измеряемую величину с точностью до 0,05 и надежностью 90%, если дисперсии случайных величин (результатов измерений) не превосходят 0,2?

3. Центральная предельная теорема. Мы уже говорили о том, что вероятностные закономерности выявляются при большом числе повторенных опытов. В предыдущих пунктах вы уже познакомились с рядом таких закономерностей в теоремах Бернулли и Чебышева. Часто, желая подчеркнуть основную роль большого числа опытов, этот круг теорем называют *законом больших чисел*. Теперь мы приведем без доказательства теорему, уточняющую эти теоремы и открывающую особую роль нормального распределения Гаусса.

Теорема (центральная предельная теорема). *Если последовательность попарно независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} M|\xi_k - M\xi_k|^3}{\left(\sum_{k=1}^{n} D\xi_k\right)^{3/2}} = 0, \tag{1}$$

то

$$\lim_{n \to \infty} P\left(a < \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \sum_{k=1}^{n} M\xi_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D\xi_k}} < b\right) = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{2}$$

Условие (1) дано русским академиком А. А. Ляпуновым. Поэтому приведенная теорема называется *центральной предельной теоремой в форме Ляпунова.*

Есть и другие формулировки центральной предельной теоремы. Отличаются они тем, что условие (1) в них заменено другим требованием.

Смысл условия (1) (и аналогичных условий) состоит в следующем: в сумме $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ «ни одно из слагаемых не доминирует», т. е. «вклад в сумму каждого слагаемого не подавляет вклада остальных слагаемых». Смысл же равенства (2) заключается в том, что при больших n случайная величина

$$\eta = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k - \sum\limits_{k=1}^{n} M\xi_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k}} \tag{3}$$

распределена по нормальному закону с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица. Это очень глубокий факт: несмотря на то, что о слагаемых мы почти ничего не знаем, об их «сумме» η мы, образно говоря, знаем почти все.

Из центральной предельной теоремы можно получить более тонкие оценки для неравенства (1) из п. 2.

Пример 1. Пусть случайные величины в центральной предельной теореме имеют равные математические ожидания и дисперсии: $M\xi_k = m$ и $D\xi_k = \sigma^2$ при любом k. Тогда при больших n

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - m\right| \geqslant a\right) \approx 1 - 2\Phi\left(a\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right), \quad a > 0. \tag{4}$$

При указанных условиях в центральной предельной теореме (равенство (2) — оцениваемая дробь) выражение (3) принимает вид

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k - \sum\limits_{k=1}^{n} M\xi_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - m\right)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Поэтому при $a>0$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-m\right|\geqslant a\right)=1-P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-m\right|<a\right)=$$

$$=1-P\left(\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-m\right)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right|<a\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)=$$

$$=1-P\left(-a\frac{\sqrt{n}}{\sigma}<\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-m\right)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}<a\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)\approx$$

$$\approx 1-\left(\Phi\left(a\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)-\Phi\left(-a\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right)=1-2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

в силу центральной предельной теоремы (для больших n).

Сделаем теперь подсчет для примера 1 из п. 2, пользуясь более точными оценками — см. (4).

Пример 2. Сколько слагаемых в примере 1 надо взять, чтобы с надежностью 96% и точностью $a=0{,}01$ для $\sigma=1$ выполнялось приближенное равенство

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\approx m?$$

Для решения поставленной задачи в приближенном равенстве (4) надо подобрать такое n, чтобы выполнялось неравенство

$$1-2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\sqrt{n}\right)<0{,}04, \quad \text{т. е.} \quad \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\sqrt{n}\right)>0{,}48.$$

По таблице находим $\Phi(2{,}06)=0{,}480301$. Следовательно, достаточно взять такое n, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{a}{\sigma}\sqrt{n}=2{,}06, \quad \text{т. е.} \quad n=\left(2{,}06\cdot\frac{\sigma}{a}\right)^2.$$

Подставляя заданные значения $a=0{,}01$ и $\sigma=1$, получаем

$$n=(206)^2\approx 40\,000.$$

Как видите, n получилось в шесть раз меньше, чем в примере 1 предыдущего пункта.

Обычно условия центральной предельной теоремы, сформулированные в той или иной форме, выполняются (т. е. «ни одно из слагаемых не доминирует»). Поэтому, как правило, нормированные суммы независимых случайных величин (т. е. суммы вида (3)) распределены по нормальному закону. Например, при измерении детали мы определяем ее истинный размер. Но в результате измерения неизбежно вкрадываются случайные ошибки, и потому результат измерения есть случайная величина. Повторяя несколько раз измерение данной детали, мы получаем последовательность независимых случайных величин. Если в измерениях нет систематической ошибки (не сбиты шкалы и т. п.), то математическое ожидание каждой случайной величины есть истинный размер детали. Дисперсии случайных величин при этом характеризуют точность проводимых измерений. Поскольку ни одно из измерений мы не выделяем как главное, то условия центральной предельной теоремы тоже соблюдены. Поэтому отклонение среднего арифметического сделанных измерений от истинного размера детали есть случайная величина, распределенная приблизительно по закону Гаусса (и чем больше проведено измерений, тем точнее получаем размер детали).

Упражнения.

1. Определить, с какой надежностью среднее арифметическое измерений дает измеряемую величину, если точность измерений 0,1, сделано 500 измерений и дисперсии случайных величин (результатов измерений) равны 0,3. Полученный результат сравните с результатом упр. 1 из п. 2.

2. Определить, с какой точностью среднее арифметическое измерений дает измеряемую величину, если измерений сделано 400, надежность результата 80% и дисперсии случайных величин равны 0,04. Полученный результат сравните с результатом упр. 2 из п. 2.

3. Сколько измерений надо сделать, чтобы среднее арифметическое их дало измеряемую величину с точностью до 0,05 и надежностью 90%, если дисперсии случайных величин равны 0,2? Полученный результат сравните с результатом упр. 3 из п. 2.

4. Проверьте, что для последовательности независимых и одинаково распределенных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, имеющих абсолютные третьи центральные моменты (т. е. существует $M|\xi_k - M\xi_k|^3$), выполнено условие Ляпунова (равенство (1)).

5. Пусть последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ удовлетворяет условию Ляпунова и такова, что $M\xi_k = m$ и $D\xi_k = 0{,}25$ для всех k. Сравните оценки, даваемые формулой (4) и неравенством (1) из п. 2, для числа n при: 1) $a = 0{,}1$; 2) $a = 0{,}05$; 3) $a = 0{,}01$.

6. Пусть последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ удовлетворяет условию Ляпунова и такова, что $M\xi_k = m$ и $D\xi_k = 0{,}01$ для всех k. Сравните оценки, даваемые формулой (4) и неравенством (1) из п. 2, для числа n при: 1) $a = 0{,}1$; 2) $a = 0{,}05$; 3) $a = 0{,}01$.

ГЛАВА III

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

В энциклопедии дано следующее определение математической статистики: «Математическая статистика — раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов. Статистическими данными называются сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками... Предметом математической статистики является формальная математическая сторона статистических методов исследования, безразличная к специфической природе изучаемых объектов». Дадим к этому некоторые пояснения.

В предыдущих главах мы имели дело с вероятностями случайных событий, случайными величинами, их математическими ожиданиями, дисперсиями, законами распределения, функциями распределения и плотностями вероятностей. При этом считалось, что все они нам уже известны. Но в практических задачах положение совершенно иное. Единственное, что мы можем сделать при изучении случайных явлений, — это ставить опыты. И все характеристики, перечисленные выше, мы должны получить из этих опытов. При этом надо иметь в виду, что всякий эксперимент связан с ошибками наблюдений и измерений, поэтому характеристики из опыта получаются приближенные. Следовательно, надо уметь оценить ошибку полученного приближенного значения для найденной характеристики. Кроме того, в вероятностных задачах еще надо учитывать надежность полученных результатов (т. е. вероятность того, что проведенные по результатам опыта вычисления дают заданную точность).

С первоначальными соображениями такого характера мы уже встречались при знакомстве с теоремой Бернулли. В разобранных там примерах показывалось, как по частоте появления события в серии из n опытов можно с заданной надежностью вычислить вероятность интересующего нас события. При этом уже отмечалось, что полученные численные оценки сильно завышены. В этой главе соответствующие формулы будут уточнены для ряда важнейших частных случаев.

Кроме описанных выше задач в статистике возникает еще одна задача — проверка гипотез. В ряде случаев теория позволяет предположить вид ответа. Например, нас интересует функция распределения изучаемой случайной величины. Допустим, что теория подсказывает, что это должен быть нормальный закон распределения (хотя бы в силу центральной предельной теоремы). Как проверить правильность нашего предположения, нашей гипотезы? С такой постановкой задачи приходится встречаться при организации текущего контроля продукции по сделанным контрольным замерам. Исходя из того, верна выдвинутая гипотеза или нет, надо принимать те или иные меры по наладке работающих станков.

Итак, наша задача состоит в том, чтобы по результатам поставленных экспериментов (наблюдений, измерений и т. п.) составить представление о той вероятностной ситуации, с которой мы столкнулись (это может быть задача о вычислении вероятности случайного события или функции распределения случайной величины, например отклонения размеров обрабатываемых деталей от нормы, или математического ожидания или дисперсии случайной величины и т. п.). При этом надо не только сделать выводы из поставленных экспериментов, но и организовать их наиболее рациональным образом. При этом в нашем распоряжении обычно оказывается довольно ограниченный числовой материал, по которому нам предстоит сделать заключение о всей изучаемой вероятностной ситуации (вероятностном процессе) в целом.

При этом эксперименты будем считать независимыми, а условия их проведения — постоянными. В этом, конечно, содержится некоторая идеализация, поскольку меняется температурный режим, снашивается измерительный инструмент и т. п., что сказывается на результатах измерений.

§ 9. Выборочный метод

Изучение множества сходных объектов может проводиться как по качественному, так и по количественному признакам. Например, если обследуется партия деталей, то качественным признаком может быть стандартность (или нестандартность) детали, а количественным признаком — размер детали.

Проверку партии деталей можно проводить двумя разными способами: 1) можно провести сплошной контроль всех деталей; 2) можно провести контроль только определенной части деталей. Первый случай не всегда удобен или из-за очень большого числа деталей в партии, или из-за того, что контроль связан с разрушением детали (например, испытание образца на разрыв).

При втором способе множество случайным образом отобранных объектов называется *выборочной совокупностью* или просто *выборкой*. Все множество объектов, подлежащих контролю и исследованию, называется *генеральной совокупностью*.

Число объектов выборочной совокупности (или генеральной совокупности) называют *объемом выборки* (или генеральной совокупности). Например, если из 10 000 деталей отобрано для контроля 100, то говорят, что объем генеральной совокупности $N = 10\,000$, а объем выборки $n = 100$.

Обычно генеральная совокупность содержит конечное множество объектов. Но оно, как правило, достаточно велико. Поэтому при теоретических выводах (для их упрощения) объем генеральной совокупности часто предполагается бесконечным. Это оправдывается тем, что увеличение объема генеральной совокупности (начиная с некоторой достаточно большой величины) уже не сказывается на результатах обработки данных выборки.

Сама выборка может проводиться двумя способами. Первый способ называется *повторной выборкой*. При ней объекты для обследования берутся поочередно из генеральной совокупности и возвращаются после обследования (детали взяли, обмерили, вернули обратно, случайно выбрали следующую деталь для обмера и т. д.; при этом не исключено, что одну и ту же деталь возьмут несколько раз). Второй способ называется *бесповторной выборкой*. При ней обследованные объекты в генеральную совокупность не возвращаются (случайным образом взяли несколько деталей, их обмерили, при этом каждая из отобранных деталей обмеривается только один раз).

Как правило, делаются бесповторные выборки.

Сделанная выборка должна достаточно полно отражать особенности всех объектов генеральной совокупности. Это особенно важно, если генеральная совокупность имеет определенную неоднородность (например, детали изготовлены на различных станках, тогда рекомендуется, чтобы в выборке были детали, изготовленные каждым станком). Коротко это требование к выборке формулируют так: выборка должна быть *репрезентативной*, т. е. представительной.

Осуществление выборки можно делать по-разному. Например, номера контролируемых деталей всей генеральной совокупности выписываются на карточки, их перемешивают и делают выборку карточек. Однако при этом сложно обеспечить хорошее перемешивание карточек (гарантирующее случайность выборки, ее репрезентативность), особенно если объем генеральной совокупности велик. На практике лучше пользоваться таблицей случайных чисел. Например, если объем выборки решили сделать равным 80, то открывают произвольную страницу таблицы и берут любые 80 чисел из этой страницы (хотя бы написанные подряд). Детали с получившимися номерами и входят в выборку. При этом может оказаться, что некоторые из получившихся случайных чисел больше тех номеров деталей, которые есть в генеральной совокупности. Тогда эти случайные числа заменяются. Такой способ называется *простым случайным отбором*.

Но он не всегда годится. Например, если партия деталей сделана на разных станках, то для репрезентативности выборки лучше, чтобы в выборку попали детали от каждого станка, т. е. выборку надо делать по продукции каждого станка и потом объединить все эти выборки. Аналогичное положение может получиться и в общем случае: по какому-то признаку генеральная совокупность может оказаться разбитой на подмножества, объекты в которых могут быть признаны однородными (в то время как по всей генеральной совокупности такой однородности не наблюдается или есть подозрение о такой неоднородности). Тогда целесообразно по каждому подмножеству провести простой случайный отбор и в выборку объединить все полученные объекты. Такой способ называется *типическим отбором*.

И, наконец, можно отбирать для обследования, например, каждую двадцатую (или сотую, или двухсотую и т. п.) деталь. Такой отбор называется *механическим*. Он не всегда дает репрезентативную выборку (особенно если после контроля производится корректирующая переналадка оборудования).

Возможна и такая система отбора: если продукция производится несколькими однотипными и одинаково налаженными автоматами, дающими однородную продукцию, то выработку некоторого автомата за определенный промежуток времени можно всю сделать выборкой. При этом говорят, что произведен *серийный отбор* продукции.

Обычно описанные выше способы комбинируют в зависимости от конкретных условий производства.

Представьте себе, что мы проверяем диаметр изготовляемых валиков. В силу различных случайных обстоятельств эти диаметры получаются различными. Можно считать, что мы имеем дело со случайной величиной ξ — диаметром изготовленного валика; для каждого конкретного валика эта случайная величина принимает определенное значение. Если во всей продукции N валиков, т. е. объем генеральной совокупности равен N, то мы можем сделать выборку объема n и промерить диаметры отобранных валиков; получатся числа

$$x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{1}$$

По этим числам надо будет приближенно представить функцию распределения случайной величины ξ, ее математическое ожидание и дисперсию. А по полученным результатам сделать вывод: идет производство нормально, или требуется наладка оборудования.

Аналогичное положение и в общем случае. Для объектов генеральной совокупности определяется некоторая числовая характеристика (которую можно замерить) — это случайная величина ξ, принимающая на каждом объекте некоторое числовое значение. Сделав выборку, мы получаем ряд значений этой случайной величины ξ — ряд чисел (1). По этой последовательности значений нам следует приблизительно представить функцию распределения случайной величины ξ, ее математическое ожидание и дисперсию.

В 1933 г. советским математиком В. И. Гливенко была доказана основная теорема математической статистики, из которой следует правило для приближенного получения функции распределения случайной величины ξ. Смысл этой теоремы заключается в следующем.

Для любого действительного числа x обозначим через $n(x)$ число чисел x_k из выборки (1), удовлетворяющих неравенству

$$x_k < x.$$

Этим на всей числовой прямой определена функция $n(x)$. Положим

$$F^*(x) = \frac{n(x)}{n}. \tag{2}$$

Эта функция называется функцией распределения выборки или *эмпирической функцией распределения* случайной величины ξ. Она и дает приближенно функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ.

Дадим некоторые наглядные разъяснения этого правила. По определению функции распределения случайной величины ξ число $F(x)$ есть вероятность случайного события $(\xi < x)$, т. е. события, состоящего в том, что в результате опыта случайная величина ξ приняла значение, меньшее x. Число же $F^*(x)$ есть частота этого события при n опытах (замер каждого значения x_k в последовательности (1) можно рассматривать как опыт, в котором интересующая нас случайная величина принимает некоторое значение). По теореме Бернулли при больших n частота события приблизительно равна его вероятности.

Часто, чтобы подчеркнуть разницу между этими функциями, $F(x)$—функцию распределения случайной величины ξ—называют *теоретической функцией распределения.*

Пример 1. В результате выборки получены числа

$$-3,\ +2,\ -1,\ -3,\ +5,\ -3,\ +2.$$

Построить график эмпирической функции распределения.

В этом примере $n=7$, $x_1=x_4=x_6$, $x_2=x_7$ и потому

$$n(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\leqslant -3, \\ 3 \text{ при } -3<x\leqslant -1, \\ 4 \text{ при } -1<x\leqslant 2, \\ 6 \text{ при } 2<x\leqslant 5, \\ 7 \text{ при } 5<x. \end{cases}$$

Следовательно,

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\leqslant -3, \\ \frac{3}{7} \text{ при } -3<x\leqslant -1, \\ \frac{4}{7} \text{ при } -1<x\leqslant 2, \\ \frac{6}{7} \text{ при } 2<x\leqslant 5, \\ 1 \text{ при } 5<x. \end{cases}$$

График эмпирической функции распределения $F^*(x)$ дан на рис. 46.

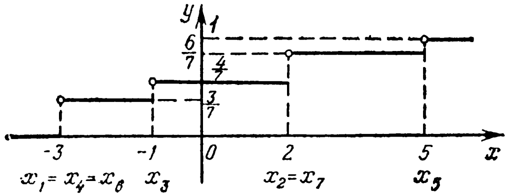


Рис. 46.

На этом примере уже видны основные особенности эмпирической функции распределения. Как и теоретическая, она не убывает, а значения ее не выходят из отрезка [0; 1]. Но эмпирическая функция распределения всегда ступенчатая. Эти «ступеньки» соответствуют наблюденным значениям, т. е. разрывы эмпирической функции распределения находятся в точках последовательности (1). При этом величина «ступеньки» равна $1/n$ в точках с несовпадающими значениями и равна k/n в точках, где k значений совпали (на рис. 46 в точке -1 «ступенька» равна $1/7$, так как в выборке -1 встречается один раз, а в точке $+2$ «ступенька» равна $2/7$, так как в выборке $+2$ встречается два раза). Если $x_{\min}$ есть наименьшее число в последовательности (1) (в примере 1 это число -3), то $F^*(x)=0$ при $x \leqslant x_{\min}$. Если $x_{\max}$ есть наибольшее число в последовательности (1) (в примере 1 это число $+5$), то $F^*(x)=1$ при $x > x_{\max}$.

Подчеркнем еще, что эмпирическая функция распределения не зависит от того, в каком порядке сделана выборка, т. е. от того, в каком порядке идут числа в последовательности (1). Для всех выборок, отличающихся только порядком чисел в последовательности (1), эмпирическая функция распределения будет одна.

Кроме эмпирической функции распределения и ее графика бывает полезно изобразить аналог плотности вероятностей. Это принято делать двумя способами. Для каждого числа x_k из последовательности (1) подсчитаем его *частоту* n_k, т. е. сколько раз это число повторяется в последовательности. Откладывая на координатной плоскости точки $(x_k; n_k)$ и проводя ломаную с вершинами в этих точках, получаем *полигон частот*. Этот график дает понятие о том, насколько часто встречается каждое значение.

Пример 2. Построим полигон частот для примера 1.

Частота числа -3 равна 3, частота числа -1 равна 1, частота числа $+2$ равна 2, и частота числа $+5$ равна 1. Полигон частот изображен на рис. 47.

Вместо частоты n_k значения x_k часто рассматривается относительная частота — число n_k/n — и строится полигон относительных частот. Получающийся при этом график отличается от полигона частот только изменением масштаба по оси ординат.

В ряде случаев (особенно для непрерывных распределений) более наглядное представление о случайной величине дает гистограмма частот (или гистограмма относительных частот). Для ее построения весь промежуток $[x_{\min}; x_{\max}]$ (от наименьшего наблюденного значения $x_{\min}$ до наибольшего наблюденного значения $x_{\max}$) разбивается на несколько промежутков равной длины h. Для каждого из полученных промежутков подсчитывается число наблюденных значений, в него попавших (с учетом частоты, т. е. подсчитывается сумма частот значений последовательности (1), попавших в этот промежуток). Если на промежутке J_s число наблюденных значений равно ν_s, то строится прямоугольник с основанием на промежутке J_s и высотой ν_s/h. Полученный чертеж (рис. 48) называется *гистограммой частот*.

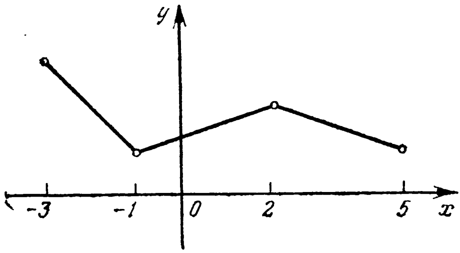


Рис. 47.

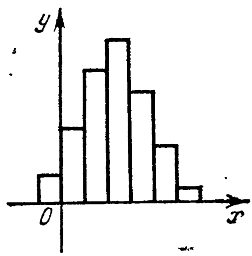


Рис. 48.

При таком построении площадь прямоугольника, построенного на промежутке J_s, равна $h \cdot \frac{\nu_s}{h} = \nu_s$, т. е. числу наблюденных значений (с учетом их частот), попавших в промежуток J_s. Следовательно, площадь всего многоугольника (составленного из построенных прямоугольников) равна числу всех наблюденных значений, т. е. объему выборки.

Пример 3. В результате наблюдений мы получили следующие значения (во второй строке указана частота соответствующего значения):

Значение	—2	0	1	2	3	5	7
Частота	4	5	7	8	6	2	1

Построим гистограмму этого распределения.

Наименьшее значение —2, наибольшее значение 7, длина этого промежутка равна 9. Разобьем его на 4 промежутка равных длин. В первый промежуток [—2; 0,25] попадает 9 наблюденных значений (—2 четыре раза и 0 пять раз), во второй промежуток [0,25; 2,5]— 15 значений, в третий [2,5; 4,75] —6 значений и в четвертый промежуток [4,75; 7] —3 значения. Для построения гистограммы удобно составить таблицу ($h=2{,}25=9/4$):

Промежуток	[—2; 0,25]	[0,25; 2,5]	[2,5; 4,75]	[4,75; 7]
ν_s (число значений)	9	15	6	3
$\frac{\nu_s}{h}$	4	$\frac{20}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$

На рис. 49 изображена соответствующая гистограмма.

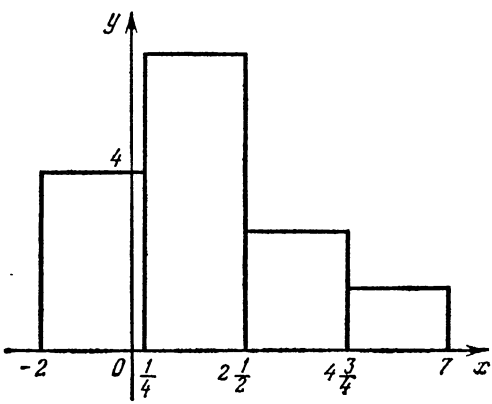


Рис. 49.

Таблица для построения гистограммы в примерах может уже задаваться готовой (т. е. выделение нужных промежутков и подсчет чисел ν_s уже сделаны).

Пример 4. Построить гистограмму по таблице (заполнив нижнюю строку)

J_s	[—8; —3]	[—3; 2]	[2; 7]	[7; 12]	[12; 17]
ν_s	3	8	15	6	2
$\frac{\nu_s}{h}$					

Длина отрезков есть $h=5$. Следовательно, последняя строка таблицы будет иметь вид

$\frac{\nu_s}{h}$	0,6	1,6	3	1,2	0.4

а гистограмма представлена на рис. 50, где по осям координат для большей выразительности графика взяты различные единицы масштаба.

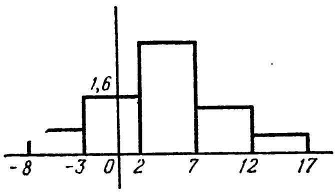


Рис. 50.

На практике измерений обычно бывает несколько сотен.

Пример 5. Контрольные обмеры 200 валиков дали следующие результаты:

7,39;	7,43;	7,54;	7,64;	7,40;	7,55;	7,40;	7,26;	7,42;	7,50
7,32;	7,31;	7,28;	7,52;	7,46;	7,63;	7,38;	7,44;	7,52;	7,53
7,37;	7,33;	7,24;	7,13;	7,53;	7,53;	7,39;	7,57;	7,51;	7,34
7,39;	7,47;	7,51;	7,48;	7,62;	7,58;	7,57;	7,33;	7,51;	7,40
7,30;	7,48;	7,40;	7,57;	7,51;	7,40;	7,52;	7,56;	7,40;	7,34
7,23;	7,37;	7,48;	7,48;	7,62;	7,35;	7,36;	7,40;	7,45;	7,29
7,48;	7,58;	7,44;	7,56;	7,28;	7,59;	7,47;	7,62;	7,54;	7,20
7,38;	7,43;	7,35;	7,56;	7,51;	7,47;	7,40;	7,29;	7,20;	7,46
7,42;	7,44;	7,41;	7,29;	7,48;	7,39;	7,50;	7,38;	7,45;	7,50
7,45;	7,42;	7,29;	7,53;	7,34;	7,55;	7,33;	7,32;	7,69;	7,46
7,32;	7,46;	7,32;	7,48;	7,38;	7,43;	7,51;	7,43;	7,60;	7,44
7,25;	7,29;	7,31;	7,45;	7,43;	7,44;	7,31;	7,58;	7,28;	7,24
7,34;	7,49;	7,50;	7,38;	7,48;	7,43;	7,37;	7,29;	7,54;	7,33
7,36;	7,46;	7,23;	7,44;	7,38;	7,27;	7,52;	7,40;	7,26;	7,66
7,59;	7,48;	7,46;	7,40;	7,24;	7,41;	7,34;	7,43;	7,38;	7,50
7,26;	7,43;	7,37;	7,55;	7,42;	7,41;	7,38;	7,14;	7,42;	7,52
7,46;	7,39;	7,35;	7,32;	7,18;	7,30;	7,54;	7,38;	7,37;	7,34
7,50;	7,61;	7,42;	7,32;	7,35;	7,40;	7,57;	7,31;	7,40;	7,36
7,28;	7,58;	7,38;	7,58;	7,26;	7,37;	7,28;	7,39;	7,32;	7,20
7,43;	7,34;	7,45;	7,33;	7,41;	7,33;	7,45;	7,31;	7,45;	7,39

Провести их обработку.

Ясно, что в таком виде эти числа никакого представления о контролируемом процессе не дают. Надо их как-то упорядочить. Самый простой способ состоит в том, что эти данные представляются графически: на координатной оси отмечаются результаты измерений, а над каждой отметкой точками помечают, сколько раз это число встретилось (сколько раз оно встретилось, столько и точек). Эту работу можно провести так: последовательно просматриваются все измерения, каждое встретившееся число отмечается на координатной оси, и над ним ставится точка. Если это число уже отмечено и над ним стоит одна или несколько точек, то над ним добавляется еще одна точка. Эту работу удобнее всего проводить на миллиметровой бумаге.

Получившаяся *точечная диаграмма* уже дает некоторое представление о сделанной выборке и может быть положена в основу дальнейшей обработки результатов контроля (рис. 51).

Чтобы проще было строить гистограммы, в таблице обычно указывают не промежутки, по которым группируются результаты измерений, а их середины — этим указанные промежутки определяются. Действительно, если длины промежутков выбраны и равны h, то

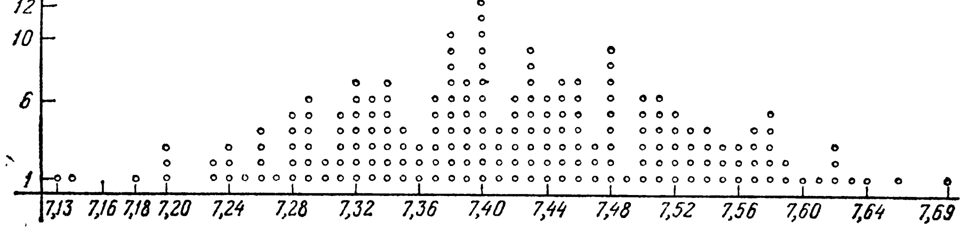


Рис. 51.

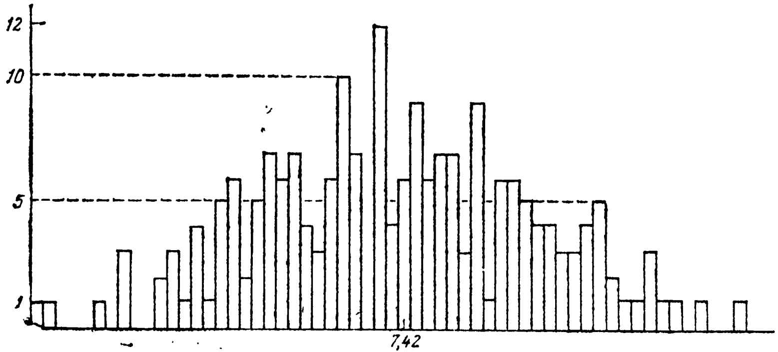


Рис. 52. $h=0{,}01$.

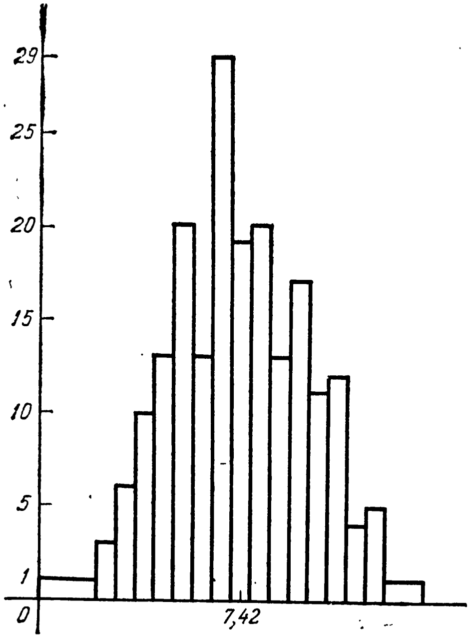


Рис. 53. $h=0,03$.

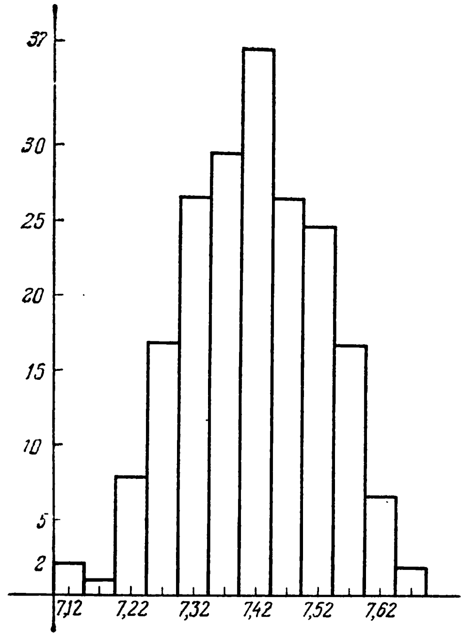


Рис. 54. $h=0,05$.

промежуток, середина которого есть число a, имеет вид $\left[a-\frac{h}{2};\ a+\frac{h}{2}\right]$. Ясно, что середины промежутков при этом находятся на расстоянии, равном h — длине этих промежутков.

Часто разбиение на промежутки начинают с середины, совпадающей с измеренным значением и расположенным ближе всего к среднему арифметическому результатов измерений (при этом крайний правый и крайний левый

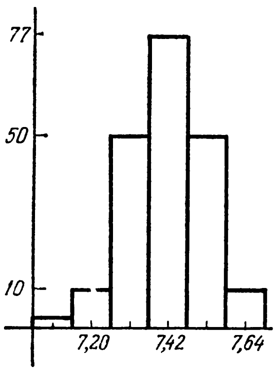


Рис. 55. $h=0,11$.

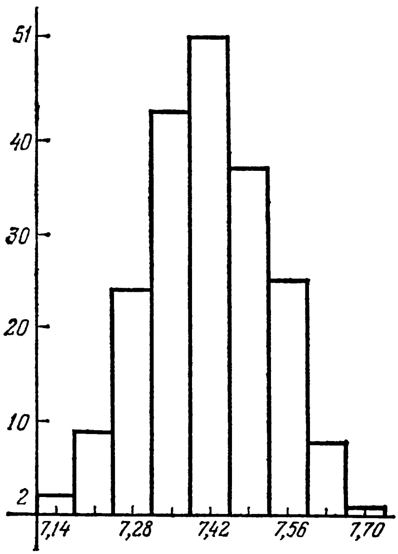


Рис. 56. $h=0,07$.

отрезки могут иметь концы в точках, отличных от точек, отмеченных на координатной оси). Для примера 5 среднее арифметическое равно 7,41645, поэтому промежутки выбираем так, чтобы одна из середин этих промежутков была точкой 7,42 — это один из результатов измерений (см. рис. 51).

От выбора длины промежутков (числа h) зависит бо́льшая или меньшая выразительность полученных гистограмм. При слишком малом h гистограмма содержит слишком много случайного (рис. 52, 53, 54). При слишком большом h в гистограмме почти теряются индивидуальные черты сделанной выборки и, следовательно, изучаемого процесса (рис. 55). Для примера 5 гистограмма лучше всего представляет распределение при шаге $h=0{,}07$ мм (рис. 56).

В отличие от гистограммы, эмпирическая функция распределения не так чувствительна к группировке данных по промежуткам при ее построении (рис. 57).

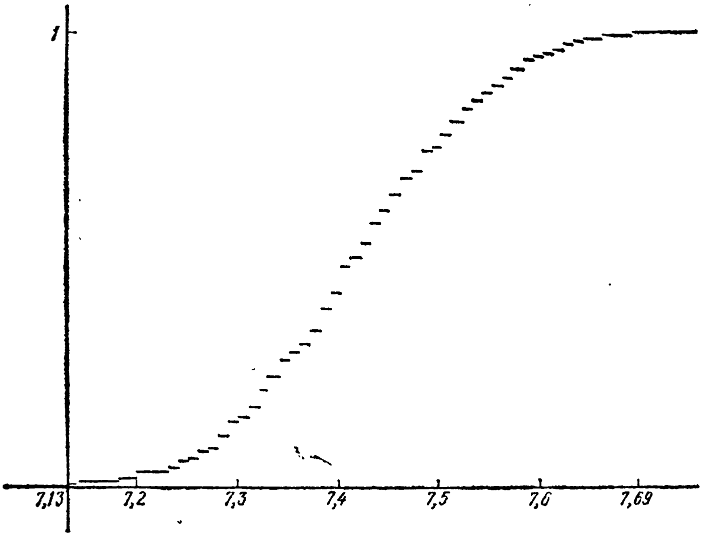


Рис. 57.

При построении гистограмм рекомендуется составлять таблицу, в первой строке которой указывается середина промежутка (x'_i), а во второй строке — число попавших в этот промежуток значений (n_i). Так, для примера 5 при построении гистограммы при $h=0{,}01$ получается таблица

x'_i	7,13	7,14	7,15	7,16	7,17	7,18	7,19	7,20
n_i	1	1	0	0	0	1	0	3
x'_i	7,21	7,22	7,23	7,24	7,25	7,26	7,27	7,28
n_i	0	0	2	3	1	4	1	5

x'_i	7,29	7,30	7,31	7,32	7,33	7,34	7,35	7,36
n_i	6	2	5	7	6	7	4	3

x'_i	7,37	7,38	7,39	7,40	7,41	7,42	7,43	7,44
n_i	6	10	7	12	4	6	9	6

x'_i	7,45	7,46	7,47	7,48	7,49	7,50	7,51	7,52
n_i	7	7	3	9	1	6	6	5

x'_i	7,53	7,54	7,55	7,56	7,57	7,58	7,59	7,60
n_i	4	4	3	3	4	5	2	1

x'_i	7,61	7,62	7,63	7,64	7,65	7,66	7,67	7,68	7,69
n_i	1	3	1	1	0	1	0	0	1

При этом следует делать простейший контроль: сумма всех чисел n_i (стоящих во второй строке) должна равняться числу результатов измерений (для примера 5 сумма должна равняться 200).

Для построения гистограммы из рис. 53 (пример 5, $h = 0,03$) получается таблица

x'_i	7,12	7,15	7,18	7,21	7,24	7,27	7,30
n_i	1	1	1	3	6	10	13

x'_i	7,33	7,36	7,39	7,42	7,45	7,48	7,51
n_i	20	13	29	19	20	13	17

x'_i	7,54	7,57	7,60	7,63	7,66	7,69
n_i	11	12	4	5	1	1

Для построения гистограммы из рис. 54 (пример 5, $h=0{,}05$) получается таблица

x'_i	7,12	7,17	7,22	7,27	7,32	7,37
n_i	2	1	8	17	27	30
x'_i	7,42	7,47	7,52	7,57	7,62	7,67
n_i	37	27	25	17	7	2

Для построения гистограммы из рис. 56 (пример 5, $h=0{,}07$) получается таблица

x'_i	7,14	7,21	7,28	7,35	7,42	7,49	7,56	7,63	7,70
n_i	2	9	24	43	51	37	25	8	1

Для построения гистограммы из рис. 55 (пример 5, $h=0{,}11$) получается таблица

x'_i	7,09	7,20	7,31	7,42	7,53	7,64
n_i	2	10	50	77	50	11

При построении графика эмпирической функции распределения (рис. 57) тоже составляется таблица: в первой строке выписываются результаты измерений (числа x_i), во второй строке этой таблицы выписывается $m_i=n(x_i)$ — число измерений, не превосходящих x_i, в третьей строке выписывается $m_i:n$, где n — число всех сделанных измерений (для примера 5 $n=200$):

x_i	7,13	7,14	7,15	7,16	7,17	7,18	7,19
m_i	1	2	2	2	2	3	3
$\frac{m_i}{n}$	0,005	0,01	0,01	0,01	0,01	0,015	0,015
x_i	7,20	7,21	7,22	7,23	7,24	7,25	7,26
m_i	6	6	6	8	11	12	16
$\frac{m_i}{n}$	0,03	0,03	0,03	0,04	0,055	0,06	0,08
x_i	7,27	7,28	7,29	7,30	7,31	7,32	7,33
m_i	17	22	28	30	35	42	48
$\frac{m_i}{n}$	0,085	0,11	0,14	0,15	0,175	0,21	0,24
x_i	7,34	7,35	7,36	7,37	7,38	7,39	7,40
m_i	55	59	62	68	78	85	97
$\frac{m_i}{n}$	0,275	0,295	0,31	0,34	0,39	0,425	0,485
x_i	7,41	7,42	7,43	7,44	7,45	7,46	7,47
m_i	101	107	116	122	129	136	139
$\frac{m_i}{n}$	0,505	0,535	0,58	0,61	0,645	0,68	0,695

Продолжение

x_i	7,48	7,49	7,50	7,51	7,52	7,53	7,54
m_i	148	149	155	161	166	170	174
$\frac{m_i}{n}$	0,74	0,745	0,775	0,805	0,83	0,85	0,87

x_i	7,55	7,56	7,57	7,58	7,59	7,60	7,61
m_i	177	180	184	189	191	192	193
$\frac{m_i}{n}$	0,885	0,90	0,92	0,945	0,955	0,96	0,965

x_i	7,62	7,63	7,64	7,65	7,66	7,67	7,68	7,69
m_i	196	197	198	198	199	199	199	200
$\frac{m_i}{n}$	0,98	0,985	0,99	0,99	0,995	0,995	0,995	1

При составлении таблиц основную роль обычно играет точечная диаграмма (для примера 5 она приведена на рис. 51). При ее составлении тоже необходим простейший контроль — число всех точек диаграммы должно равняться числу всех сделанных измерений.

По гистограмме уже можно себе представить плотность вероятностей случайной величины. Например, по гистограмме на рис. 55 получаем приблизительно график плотностей вероятностей — рис. 58. По эмпирической функции распределения (рис. 57) можно уже приблизительно представить теоретическую функцию распределения (рис. 59).

Упражнения.

1. В результате выборки получены числа

$-5,\ +1,\ -3,\ -2,\ 0,\ 0,\ +3,\ -3,\ -2,\ 0,\ +1,\ +2,\ 0,\ 0.$

Постройте график эмпирической функции распределения, точечную диаграмму и гистограмму.

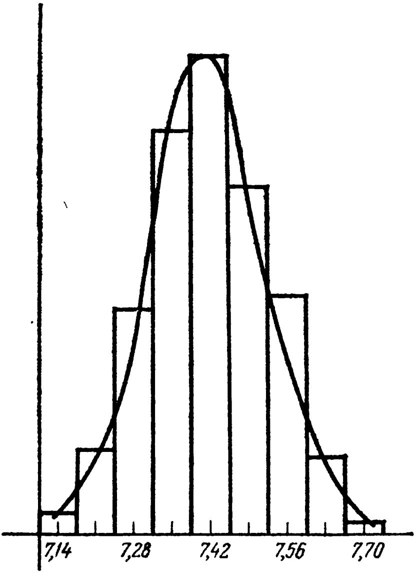


Рис. 58.

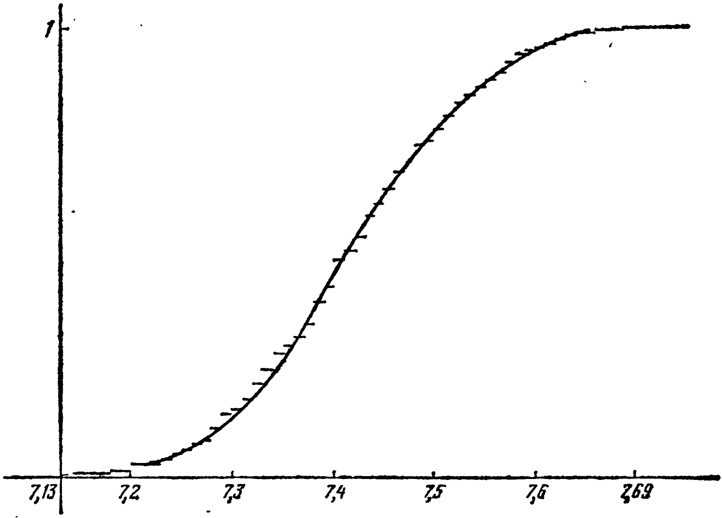


Рис. 59.

2. Для выборки

$$+2, -1, +2, -1, -4, +5, +2, +2, -1, +5$$

постройте эмпирическую функцию распределения, точечную диаграмму и гистограмму.

3. В цехе работают четыре станка, причем вероятность остановки в течение часа для каждого из них равна 0,8. Построить полигон распределения вероятности числа станков, остановившихся в течение данного часа.

4. Через каждый час измерялось напряжение тока в электросети. При этом были получены следующие значения (в В):

227	219	215	230	232	223	220	222	218	219
222	221	227	226	226	209	211	215	218	220
216	220	220	221	225	224	212	217	219	220

Постройте эмпирическую функцию распределения, точечную диаграмму и гистограмму.

5. На приемных экзаменах выборка среди абитуриентов дала следующие набранные ими баллы:

20	19	22	24	21	18	23	17	20	16	15	23	21	24	21
18	23	21	19	20	24	21	20	18	17	22	20	16	22	18
20	17	21	17	19	20	20	21	18	22	23	21	25	22	20
19	21	24	23	21	19	22	21	19	20	23	22	25	21	21

Постройте эмпирическую функцию распределения, точечную диаграмму и гистограмму.

6. Измерения толщины слюдяных прокладок дали следующие результаты (в мм):

0,021	0,030	0,039	0,031	0,042	0,034	0,036	0,030	0,028	0,030
0,033	0,024	0,031	0,040	0,031	0,033	0,031	0,027	0,031	0,045
0,031	0,034	0,027	0,030	0,048	0,030	0,028	0,030	0,033	0,046
0,043	0,030	0,033	0,028	0,028	0,031	0,027	0,031	0,036	0,051
0,034	0,031	0,034	0,037	0,028	0,030	0,039	0,031	0,042	0,037

Постройте гистограмму с шагом 0,004.

7. Контрольные обмеры диаметров шариков дали следующие результаты (в 0,01 мм):

561	555	569	555	567	559	567	555	566	557
580	568	561	572	563	574	542	562	542	572
564	560	569	543	560	565	568	558	539	550
566	563	562	546	570	582	568	565	561	554
548	558	586	562	559	558	545	563	557	574
550	562	557	566	559	576	560	554	552	541
534	574	560	548	573	562	556	577	554	564
567	546	571	563	557	552	562	550	551	566
576	572	542	569	556	557	555	569	571	575
556	540	557	549	577	562	552	568	554	568
554	531	568	567	545	566	547	571	558	555
550	555	562	550	561	552	571	559	556	558
554	580	571	560	553	549	544	565	557	562
580	546	538	553	541	572	544	556	542	552

571	555	560	564	565	538	552	552	563	577
566	560	544	548	560	549	543	560	552	570
560	549	567	543	542	538	552	549	553	561
566	549	543	561	547	547	587	576	567	563
547	548	556	562	537	554	548	572	569	568
550	558	574	560	545	560	536	546	557	561

Проведите статистическую обработку этих данных.

§ 10. Точечные оценки параметров

Мы приступаем к выводу приближенных формул для математического ожидания и дисперсии случайной величины по сделанным наблюдениям (это тоже параметры случайной величины). Далее будет решаться более сложная задача — оценка параметров теоретической функции распределения (или плотности вероятностей). Например, известно, что случайная величина распределена равномерно; требуется по наблюденным значениям приблизительно найти промежуток, на котором находятся значения случайной величины.

Для математического ожидания случайной величины, для которой были зарегистрированы значения x_1, x_2, x_3, ..., x_n, принято брать среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \tag{1}$$

в качестве приближенного значения. Число $\bar{x}$ называют *эмпирическим* (или *выборочным*) *математическим ожиданием* или *средним по выборке.*

Для дисперсии $\sigma^2 = D\xi$ в качестве приближенного значения принято брать

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2. \tag{2}$$

Число s^2 называют *эмпирической* (или *выборочной*) *дисперсией.*

Если приближенное равенство $M\xi \approx \bar{x}$ естественно, то в приближенном равенстве $\sigma^2 \approx s^2$ должен удивить множитель $\frac{1}{n-1}$ вместо напрашивающегося множителя $\frac{1}{n}$. Почему выбор пал на $\frac{1}{n-1}$, а не на $\frac{1}{n}$, будет видно из дальнейших разъяснений.

Записанные приближенные равенства называют *точечными оценками* параметров $M\xi$ и $\sigma^2 = D\xi$ рассматриваемой случайной величины.

Наблюдаемые в эксперименте значения x_k случайной величины ξ сами являются случайными величинами (только от случая зависит, что в качестве k-го значения было зафиксировано число x_k, а не какое-нибудь другое значение случайной величины ξ). Эти случайные величины могут принимать только те значения, что и ξ, и распределены они так же, как ξ, т. е. на них мы можем глядеть как на n «различных экземпляров одной и той же случайной величины ξ». Поэтому $Mx_k = M\xi$ и $Dx_k = D\xi = \sigma^2$ для всех k. Так как отбор в выборку проводится случайно, то x_k — независимые случайные величины.

Такой взгляд на полученные из эксперимента значения как на случайные величины позволяет сформулировать требования к точечным оценкам параметров (мы ограничиваемся $M\xi$ и $D\xi$).

Вводимые в статистике точечные оценки параметров должны обладать тремя свойствами: *несмещенностью*, *состоятельностью* и *эффективностью*. Разберем их.

1. *Несмещенность* точечных оценок для математического ожидания и дисперсии (данных равенствами (1) и (2)) означает, что

$$M\bar{x} = M\xi, \tag{3}$$

$$Ms^2 = \sigma^2. \tag{4}$$

Аналогичный смысл имеет несмещенность точечной оценки любого иного параметра.

Докажем равенство (3). В силу свойств математического ожидания и отмеченного выше равенства $M\xi = Mx_k$ для всех k, имеем

$$M\bar{x} = M\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}(Mx_1 + Mx_2 + \ldots + Mx_n) = \frac{1}{n} nM\xi = M\xi.$$

Этим доказано, что $\bar{x}$ есть несмещенная точечная оценка $M\xi$.

Докажем теперь равенство (4). В силу свойств математического ожидания и отмеченного выше равенства $Dx_k = D\xi = \sigma^2$ для всех k, имеем

$$Ms^2 = M\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}M(x_k-\bar{x})^2 \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=}\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(D(x_k-\bar{x})+M^2(x_k-\bar{x})\right)\overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=}\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}D\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)x_k-\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}x_i\right)+$$

$$+\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(Mx_k-M\bar{x})^2\overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=}\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 Dx_k+\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}Dx_i\right)\overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=}\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2\right)\overset{(5)}{=}$$

$$\overset{(5)}{=}\frac{1}{n-1}n\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2\right)=$$

$$=\sigma^2\left(\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}\right)=\sigma^2.$$

(1) Для любой случайной величины $D\eta = M\eta^2 - M^2\eta$, откуда следует, что $M\eta^2 = D\eta + M^2\eta$ (см. § 5, п. 4, упр. 2).

(2) Группируем слагаемые с одинаковыми номерами, воспользовавшись тем, что

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\left(x_k+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}x_i\right)\frac{1}{n}.$$

(3) Поскольку случайные величины x_k независимы, то дисперсия суммы равна сумме дисперсий, а за знак дисперсии выносится квадрат постоянного множителя (см. гл. II); кроме того, все слагаемые во второй сумме равны нулю: $Mx_k - M\bar{x} = M\xi - M\xi = 0$.

(4) Так как $Dx_k = \sigma^2$ и сумма в круглых скобках содержит $n-1$ слагаемых, каждое из которых равно σ^2.

(5) Получилось n одинаковых слагаемых.

Этим равенство (4) доказано. То есть доказано, что s^2 есть несмещенная точечная оценка для $\sigma^2 = D\xi$.

II. *Состоятельность* точечных оценок для математического ожидания и дисперсии (данных равенствами (1) и (2)) означает, что для любого положительного числа a выполнены равенства

$$\lim_{n\to\infty} P(|M\xi - \bar{x}| > a) = 0 \tag{5}$$

(состоятельность оценки для $M\xi$) и

$$\lim_{n\to\infty} P(|D\xi - s^2| > a) = 0 \tag{6}$$

(состоятельность оценки для $D\xi$).

При доказательстве состоятельности оценки для математического ожидания случайной величины воспользуемся равенством $M\bar{x} = M\xi$ (формула (3)) и неравенством Чебышева (§ 8, п. 1):

$$P(|M\xi - \bar{x}| > a) = P(|\bar{x} - M\bar{x}| > a) < \frac{D\bar{x}}{a^2} \overset{(1)}{=} \frac{\sigma^2}{na^2}.$$

(1) Так как x_k — независимые случайные величины и $Dx_k = \sigma^2$ для любого k, то

$$D\bar{x} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Dx_k = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Из полученной оценки ясно, что имеет место формула (5).

Состоятельность оценки для дисперсии (формула (6)) доказывается в предположении, что существуют четвертые моменты, и значительно сложнее. Это доказательство выходит за рамки курса.

Наглядное представление о состоятельности оценок для математического ожидания и дисперсии состоит в том, что формулы (1) и (2) позволяют подсчитывать математическое ожидание как $\bar{x}$ и дисперсию как s^2 с любой точностью и надежностью (при достаточном объеме выборки).

III. *Эффективность* точечных оценок (1) и (2) для математического ожидания и дисперсии (соответственно) означает, что

$$D\bar{x} \text{ и } Ds^2 \textit{ минимальны.}$$

Понимать это надо так. Полученные из формул $\bar{x}$ и s^2 суть случайные величины, поскольку x_k—случайные величины. Поэтому можно говорить не только об их математических ожиданиях (как это делалось при определении несмещенности этих оценок), но и об их дисперсиях. Минимальность $D\bar{x}$ и Ds^2 означает, что для любой другой точечной оценки m математического ожидания и для любой другой точечной оценки ω^2 дисперсии будут выполнены неравенства

$$Dm > D\bar{x}, \quad D\omega^2 > Ds^2.$$

Доказательство этих фактов сложно и выходит за рамки курса.

Из проделанных экспериментов можно находить и другие параметры, помимо математического ожидания и дисперсии. Например, можно находить вероятность интересующего нас события или момента третьего, четвертого и т. д. порядков. Из опыта мы получаем некоторую точечную оценку интересующего нас параметра θ, т. е. по полученным в эксперименте числам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по некоторой формуле получаем число $\bar{\theta}$, которое и называем точечной оценкой параметра θ. Таким образом, $\bar{\theta}$ есть некоторая функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (случайных величин), и потому $\bar{\theta}$ тоже случайная величина. Как и для математического ожидания, для дисперсии говорят:

точечная оценка $\bar{\theta}$ параметра θ называется *несмещенной*, если

$$M\bar{\theta} = \theta;$$

точечная оценка $\bar{\theta}$ параметра θ называется *состоятельной*, если

$$\lim_{n \to \infty} P(|\bar{\theta} - \theta| > a) = 0$$

при любом $a > 0$;

точечная оценка $\overline{\theta}$ параметра θ называется *эффективной*, если $D\overline{\theta}$ минимальна, т. е. если для любой другой точечной оценки $\overline{\omega}$ выполняется неравенство

$$D\overline{\omega} > D\overline{\theta}.$$

Например, частота появления события A в схеме испытаний Бернулли есть состоятельная оценка для вероятности p появления события A при каждом испытании. Это следует из теоремы Бернулли.

Пример 1. Контрольные обмеры диаметров болтов дали следующие результаты:

2,31; 2,28; 2,29; 2,28; 2,32; 2,28; 2,32; 2,29; 2,31; 2,32.

Найти точечные оценки для диаметра болта и его дисперсии в контролируемом процессе производства.

По формуле (1) вычисляем среднее арифметическое полученных измерений $\overline{x}=2,3$ и $s^2=0,0003$.

При вычислении среднего арифметического (когда берется сумма сделанных измерений и т. п.) вручную удобно пользоваться так называемым условным нулем. Это число, которое удобно выделить из всех рассматриваемых слагаемых. Так, в примере 1 условный нуль можно положить равным 2,3 (он случайно совпал с $\overline{x}$ — это несущественно). Тогда результаты измерений упрощенно можно представить так (выписывая только сотые и опуская нуль целых и нуль десятых): $+1$; -2; -1; -2; $+2$; -2; $+2$; -1; $+1$; $+2$. Среднее арифметическое этих чисел найти значительно проще. Добавленное к условному нулю, оно и дает требуемое. Действительно, пусть для чисел x_k, $k=1, 2, \ldots, n$, мы положили C равным условному нулю. Тогда

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(C+x_k-C)=$$

$$=\frac{nC}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-C)=C+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-C),$$

что и доказывает отмеченный прием, поскольку второе слагаемое есть среднее арифметическое измененных данных.

Пример 2. Для контрольных обмеров примера 5 (стр. 165) дать точечные оценки для размера валика и его дисперсии.

Подсчет среднего арифметического дает

$$\bar{x}=7,41645.$$

При вычислении s^2 по формуле (2) рекомендуется составлять таблицу (во втором столбце число n_i указывает частоту появления числа x_i, а поскольку нас интересуют квадраты разностей $x_i-\bar{x}$, то в третьем столбце достаточно выписывать их модули).

x_i	n_i	$\|x_i-\bar{x}\|$	$(x_i-\bar{x})^2$	$n_i(x_i-\bar{x})^2$
7,13	1	0,28645	0,0820536	0,0820536
7,14	1	0,27645	0,0764246	0,0764246
7,15	0	—	—	0,0000000
7,16	0	—	—	0,0000000
7,17	0	—	—	0,0000000
7,18	1	0,23645	0,0559086	0,0559086
7,19	0	—	—	0,0000000
7,20	3	0,21645	0,0468506	0,1405518
7,21	0	—	—	0,0000000
7,22	0	—	—	0,0000000
7,23	2	0,18645	0,0347636	0,0695272
7,24	3	0,17645	0,0311346	0,0934038
7,25	1	0,16645	0,0277056	0,0277056
7,26	4	0,15645	0,0244766	0,0979064
7,27	1	0,14645	0,0214476	0,0214476
7,28	5	0,13645	0,0186186	0,0930930
7,29	6	0,12645	0,0159896	0,0959379
7,30	2	0,11645	0,0135606	0,0271212
7,31	5	0,10645	0,0113316	0,0566580
7,32	7	0,09645	0,0093026	0,0651182
7,33	6	0,08645	0,0074736	0,0448416
7,34	7	0,07645	0,0058446	0,0409122
7,35	4	0,06645	0,0044156	0,0176624
7,36	3	0,05645	0,0031866	0,0095598
7,37	6	0,04645	0,0021576	0,0129456
7,38	10	0,03645	0,0013286	0,0132860
7,39	7	0,02645	0,0006996	0,0048972
7,40	12	0,01645	0,0002706	0,0032472
7,41	4	0,00645	0,0000416	0,0001664
7,42	6	0,00355	0,0000126	0,0000756
7,43	9	0,01355	0,0001836	0,0016524
7,44	6	0,02355	0,0005546	0,0033276
7,45	7	0,03355	0,0011256	0,0078792

x_i	n_i	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$(x_i-\bar{x})^2$	$n_i(x_i-\bar{x})^2$
7,46	7	0,04355	0,0018966	0,0132762
7,47	3	0,05355	0,0028676	0,0086028
7,48	9	0,06355	0,0040386	0,0363474
7,49	1	0,07355	0,0054960	0,0054960
7,50	6	0,08355	0,0069806	0,0418836
7,51	6	0,09355	0,0087516	0,0525096
7,52	5	0,10355	0,0107226	0,0536130
7,53	4	0,11355	0,0128936	0,0515744
7,54	4	0,12355	0,0156460	0,0610584
7,55	3	0,13355	0,0178356	0,0535068
7,56	3	0,14355	0,0206066	0,0618198
7,57	4	0,15355	0,0235776	0,0943104
7,58	5	0,16355	0,0267486	0,1337430
7,59	2	0,17355	0,0301196	0,0602392
7,60	1	0,18355	0,0336906	0,0336906
7,61	1	0,19355	0,0374616	0,0374616
7,62	3	0,20355	0,0414326	0,1242978
7,63	1	0,21355	0,0456036	0,0456036
7,64	1	0,22355	0,0499746	0,0499746
7,65	0	—	—	0,0000000
7,66	1	0,24355	0,0593166	0,0593166
7,67	0	—	—	0,0000000
7,68	0	—	—	0,0000000
7,69	1	0,27355	0,0748296	0,0748296

Для вычисления s^2 по формуле (2) в полученной таблице теперь надо сложить все числа последнего столбца (получим 2,3464657) и разделить эту сумму на 199 $(=n-1=200-1)$:

$$s^2=0,0117913.$$

Из проделанной обработки рассматриваемой выборки можно сделать такие практические выводы: размер обрабатываемых валиков в среднем 7,4, и продукция идет со средним отклонением от 7,4, равным приблизительно 0,1 (это число $s=\sqrt{0,0117913}\approx 0,1$).

Замечание. Часто приходится вычислять выборочное среднее и дисперсию не по полным данным, а по сгруппированным (так, как это делается при составлении таблиц для гистограмм). Тогда (в помещенных там обозначениях)

$$\bar{x}_r=\frac{1}{n}\sum x_i n_i,$$

$$s_r^2=\frac{1}{n-1}\sum (x_i-\bar{x}_i)^2 n_i.$$

При этом получается некоторая ошибка по сравнению с $\bar{x}$ и s^2, полученными без группировки данных. Но если интервалы группировки невелики (или случайная величина мало меняется по выбранным интервалам), то полученные ошибки тоже малы.

Например, сделаем подсчет для примера 5 (стр. 165) по сгруппированным данным по интервалам длины 0,05 (таблица для гистограммы рис. 54, стр. 171):

$$\bar{x}_r=\frac{1}{200}(7{,}12\cdot 2+7{,}17\cdot 1+7{,}22\cdot 8+7{,}27\cdot 17+$$
$$+7{,}32\cdot 27+7{,}37\cdot 30+7{,}42\cdot 37+7{,}47\cdot 27+7{,}52\cdot 25+$$
$$+7{,}57\cdot 17+7{,}62\cdot 7+7{,}67\cdot 2)=7{,}4205,$$

$$s_r^2=\frac{1}{199}((0{,}3005)^2\cdot 2+(0{,}2505)^2\cdot 1+(0{,}2005)^2\cdot 8+$$
$$+(0{,}1505)^2\cdot 17+(0{,}1005)^2\cdot 27+(0{,}0505)^2\cdot 30+$$
$$+(0{,}0005)^2\cdot 37+(0{,}0495)^2\cdot 27+(0{,}0995)^2\cdot 25+$$
$$+(0{,}1495)^2\cdot 17+(0{,}1995)^2\cdot 7+(0{,}2495)^2\cdot 2)=$$
$$=\frac{2{,}38406}{199}=0{,}01198.$$

Сравнивая полученные значения с вычисленными ранее, видим, что сделанные ошибки незначительны.

Стоит отметить, что в практических экспериментах мы всегда имеем дело со сгруппированными выборками. В самом деле, всякое измерение проводится с определенной точностью, например с точностью до 0,001. Это значит, что все значения случайной величины, отличающиеся от 7,42 меньше чем на 0,001, мы в выборке записываем равными 7,42. А это и означает, что в результате получается сгруппированная выборка.

Упражнение. Вычислите эмпирическое математическое ожидание и дисперсию в упражнениях к § 9.

§ 11. Доверительные интервалы

Разобранные выше точечные оценки параметров распределения (математического ожидания и дисперсии) могут быть приняты в качестве первоначальных ориентировочных результатов обработки наблюдений. Их недостаток в том, что неизвестно, с какой точностью они дают оцениваемый параметр. Если для большого числа наблюдений точность обычно бывает достаточной для практических выводов (в силу несмещенности, состоятельности и эффективности сделанных оценок), то для выборок небольшого объема вопрос о точности оценок очень существен.

Поставленная задача в математической статистике решается следующим образом. Пусть θ — неизвестный нам параметр распределения. По сделанной выборке находятся (по определенным правилам) числа θ_1 и θ_2 так, чтобы выполнялось

$$P(\theta \in (\theta_1;\ \theta_2)) \geqslant \gamma.$$

Числа θ_1 и θ_2 называются *доверительными границами*, а интервал $(\theta_1;\ \theta_2)$ — *доверительным интервалом* для параметра θ. Число γ называется *надежностью* сделанной оценки.

Вычисления обычно начинают с того, что задается их надежность γ, которую принято выбирать равной 0,95; 0,99 или 0,999. Тогда вероятность того, что интересующий нас параметр θ не попал в доверительный интервал $(\theta_1;\ \theta_2)$, не превосходит соответственно 0,05; 0,01 или 0,001. Если мы считаем, что все события, вероятность которых меньше 0,05 (соответственно 0,01 или 0,001), практически невозможны, то, следовательно, практически достоверно попадание параметра θ в доверительный интервал $(\theta_1;\ \theta_2)$. Поэтому число $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ (середина доверительного интервала) будет давать нам значение параметра θ с точностью $\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$ и практически достоверно.

Прежде чем перейти к описанию вычислений, сделаем одно терминологическое замечание. Числа θ_1 и θ_2 находятся по сделанной выборке и потому суть функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (случайных величин) а, следовательно, сами — случайные величины. Таким образом, доверительный интервал $(\theta_1; \theta_2)$ тоже случаен. Он может покрывать параметр θ (это определенное число) или нет. Именно в таком смысле и понимают случайное событие $(\theta \in (\theta_1; \theta_2))$, состоящее в том, что доверительный интервал покрывает число θ.

Поскольку наиболее часто встречаются нормально распределенные случайные величины (появляющиеся на практике в силу центральной предельной теоремы), то будем находить доверительные интервалы для параметров нормального распределения — математического ожидания a и дисперсии σ^2.

§ 12. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии

Пусть случайная величина ξ распределена по нормальному закону, для которого известна дисперсия σ^2. Тогда выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может рассматриваться (как это уже делалось выше) как n независимых случайных величин, распределенных, как случайная величина ξ. Поэтому

$$M(x_1) = M(x_2) = \ldots = M(x_n) = a,$$
$$D(x_1) = D(x_2) = \ldots = D(x_n) = \sigma^2.$$

Для среднего арифметического $\bar{x}$ (см. (1) § 10) было подсчитано, что

$$M(\bar{x}) = a, \quad D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

А так как случайные величины x_k распределены по нормальному закону, то и их сумма (а потому и $\bar{x}$) тоже распределена по нормальному закону (§ 7, п. 4). Подберем теперь по заданной надежности γ число $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось условие

$$P(|\bar{x} - a| < \delta) = \gamma. \qquad (1)$$

Поскольку случайная величина $\bar{x}$ распределена по нормальному закону с параметрами $M\bar{x} = a$ и $D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}$, то ее функция распределения имеет вид (см. стр. 139)

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\sqrt{n}\right).$$

Поэтому левая часть в (1) может быть преобразована так:

$$P(|\overline{x}-a|<\delta)=P(a-\delta<\overline{x}<a+\delta)=$$
$$=F(a+\delta)-F(a-\delta)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{6}\right)-\frac{1}{2}-$$
$$-\Phi\left(\frac{-\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Остается подобрать δ таким, чтобы выполнялось равенство

$$2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)=\gamma.$$

Поскольку функция Φ непрерывна и возрастает на $[0;\infty[$ от 0 до 0,5, то для любого числа γ, удовлетворяющего неравенствам $0<\gamma<1$, существует единственное число t_γ такое, что

$$\Phi(t_\gamma)=\frac{1}{2}\gamma.$$

Это число t_γ называется *квантилем* $\frac{\gamma+1}{2}$ *нормального распределения*. Используя его, условие (1) можно переписать в виде

$$P\left(\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma<a<\overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma\right)=\gamma,$$

поскольку $t_\gamma=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$ и $\delta=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma$.

Число t_γ в конкретных примерах подбирается по таблице нормального распределения Φ.

Смысл полученного результата состоит в следующем: с надежностью γ доверительный интервал

$$\left(\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma;\ \overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma\right)$$

покрывает неизвестный параметр a; точечная оценка $\overline{x}$ дает значение параметра a с точностью до $\delta=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma$ и с надежностью γ.

Сравним полученное решение с тем, что говорилось при общей постановке задачи. В разобранном случае неизвестный нам параметр θ равен a, доверительные границы суть

$$\theta_1 = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\gamma, \quad \theta_2 = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\gamma.$$

Правило их нахождения указано формулами: надо найти среднее арифметическое $\bar{x}$ для сделанной выборки, найти t_γ (по таблице функции Φ) и вычислить доверительные границы по указанным формулам.

Пример 1. Случайная величина распределена по нормальному закону с параметром $\sigma = 2$. Сделана выборка объема $n = 25$. Найдем с надежностью $\gamma = 0{,}95$ доверительный интервал для неизвестного параметра a этого распределения.

Из равенства $\Phi(t) = \frac{1}{2}\gamma = 0{,}475$ найдем по таблице функции Φ число $t_\gamma = 1{,}96$. Тогда точность оценки есть

$$\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\gamma = \frac{2}{\sqrt{25}} \cdot 1{,}96 = 0{,}784,$$

а доверительный интервал —

$$(\bar{x} - 0{,}784; \quad \bar{x} + 0{,}784).$$

Например, если для сделанной выборки $\bar{x} = 2{,}3$, то с надежностью в 95% интервал (1,5; 3,1) покрывает неизвестный параметр a, т. е. $a = 2{,}3$ с точностью до 0,8 и надежностью в 95%.

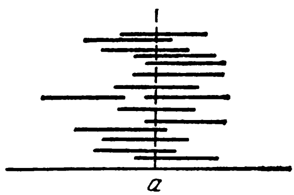


Рис. 60.

То, что доверительный интервал $(\bar{x} - 0{,}784; \bar{x} + 0{,}784)$ покрывает параметр a с надежностью в 95%, означает, что в 95% сделанных в этих условиях выборках этот интервал покрывает число a. На рис. 60 схематически друг над другом изображены доверительные интервалы, которые могут получиться для разных выборок.

Упражнения. Случайная величина распределена по нормальному закону с параметром σ. Сделана выборка объема n.

Найдите с надежностью γ доверительный интервал для неизвестного параметра a, если:

1. $\sigma=3$, $n=36$, $\gamma=0{,}95$.
2. $\sigma=3$, $n=36$, $\gamma=0{,}99$.
3. $\sigma=3$, $n=36$, $\gamma=0{,}999$.
4. $\sigma=3$, $n=81$, $\gamma=0{,}95$.
5. $\sigma=0{,}3$, $n=36$, $\gamma=0{,}99$.
6. $\sigma=0{,}4$, $n=81$, $\gamma=0{,}95$.

Случайная величина распределена по нормальному закону с параметром σ. Найдите минимальный объем выборки n, чтобы с надежностью γ и точностью δ выполнялось равенство $\overline{x}=a$, если:

7. $\sigma=0{,}5$, $\gamma=0{,}95$, $\delta=0{,}1$.
8. $\sigma=0{,}1$, $\gamma=0{,}95$, $\delta=0{,}1$.
9. $\sigma=1{,}25$, $\gamma=0{,}95$, $\delta=0{,}1$.
10. $\sigma=0{,}5$, $\gamma=0{,}99$, $\delta=0{,}1$.
11. $\sigma=0{,}5$, $\gamma=0{,}95$, $\delta=0{,}2$.

12. Из нормально распределенной генеральной совокупности сделана выборка:

—1,90	1,37	—0,89	—0,13	0,15	—0,79	—0,06	1,55	0,40	0,69
—0,90	0,15	0,90	0,82	1,53	—0,34	0,98	—1,38	1,48	—0,65
1,10	0,30	—0,13	—1,90	—0,32	—0,42	0,77	0,08	0,17	0,87

Найдите с надежностью 0,9 доверительный интервал для математического ожидания, считая дисперсию σ^2 равной единице.

§ 13. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения

Пусть случайная величина ξ распределена по нормальному закону, для которого неизвестна дисперсия σ^2. Выборку $x_1, x_2, \ldots, x_n$ опять рассматриваем как n независимых случайных величин, каждая из которых распределена, как случайная величина ξ. Для решения поставленной задачи рассмотрим случайную величину

$$\chi^2=\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2}.$$

Ее функция распределения называется распределением хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы. Пусть $F(x)$ есть функция распределения этой случайной величины. Подберем по заданной надежности γ положительные числа $x_1(\gamma)$ и $x_2(\gamma)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$F(x_1^2(\gamma))=\frac{1-\gamma}{2}, \quad F(x_2^2(\gamma))=\frac{1+\gamma}{2}.$$

Поскольку функция распределения $F(x)$ возрастает и непрерывна (так как все слагаемые в сумме χ^2 распределены по нормальному закону, т. е. непрерывно), то для любого числа γ $(0<\gamma<1)$ числа $x_1(\gamma)$ и $x_2(\gamma)$ существуют и единственны. Тогда

$$P(x_1^2(\gamma)<\chi^2<x_2^2(\gamma))=F(x_2^2(\gamma))-F(x_1^2(\gamma))=$$
$$=\frac{1+\gamma}{2}-\frac{1-\gamma}{2}=\gamma,$$

или

$$P\left(x_1^2(\gamma)<\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}<x_2^2(\gamma)\right)=\gamma,$$

откуда получаем

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{x_2^2(\gamma)}<\sigma^2<\frac{(n-1)s^2}{x_1^2(\gamma)}\right)=\gamma.$$

Следовательно, интервал $\left(\frac{(n-1)s^2}{x_2^2(\gamma)};\ \frac{(n-1)s^2}{x_1^2(\gamma)}\right)$ есть доверительный интервал для дисперсии σ^2 с надежностью γ, а интервал $\left(\frac{\sqrt{n-1}\,s}{x_2(\gamma)};\ \frac{\sqrt{n-1}\,s}{x_1(\gamma)}\right)$—доверительный интервал для параметра σ нормального распределения с надежностью γ.

В приложении 7 приведены таблицы, с помощью которых поставленная задача решается. Для математической статистики удобнее в таблицах давать решение уравнения (говорят: $100q$-процентная достоверность)

$$1-F(x^2)=q,$$

т. е. приведенная вероятность события $(\chi^2>x^2)$ есть

$$P(\chi^2>x^2)=q.$$

Чтобы установить связь с приведенным выше решением, надо учесть, что в этих обозначениях

$$F(x_2^2(\gamma))=1-q,\quad 1-F(x_2^2(\gamma))=q,$$
$$F(x_1^2(\gamma))=q,\quad 1-F(x_1^2(\gamma))=1-q,$$

а связь надежности γ с числом q дается формулой

$$\gamma=1-2q.$$

Пример 1. Вычислим с надежностью 0,96 доверительный интервал для дисперсии нормального распределения по выборке объема 18. Если $\gamma=0{,}96$, то $q=0{,}02$ и по таблице (приложение 7) (в строке 17 и колонке 0,02) находим $x_2=31,0$. Для нахождения x_1 берем $1-q=0,98$ и в колонке 0,98 и строке 17 находим $x_1=7,3$. Следовательно, доверительный интервал

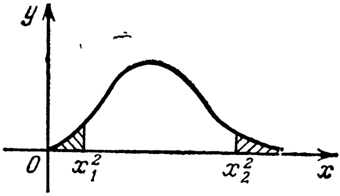


Рис. 61.

с надежностью 0,96 для дисперсии будет

$$\left(\frac{18s^2}{31};\ \frac{18s^2}{7,3}\right),$$

а для параметра σ

$$\left(\frac{3\sqrt{2}s}{\sqrt{31}};\ \frac{3\sqrt{2}s}{\sqrt{7,3}}\right).$$

Проиллюстрируем данное решение. На рис. 61 приведен график плотности вероятностей распределения хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы. Заштрихованные площади имеют величину q, и потому их границы суть числа x_1 и x_2, которыми мы пользуемся при решении.

Упражнения. Найдите дисперсию нормально распределенной генеральной совокупности с заданной надежностью γ по выборке объема n, если:

1. $\gamma=0,9$, $n=20$. 2. $\gamma=0,9$, $n=8$.
3. $\gamma=0,9$, $n=25$. 4. $\gamma=0,98$, $n=20$.
5. $\gamma=0,98$, $n=8$. 6. $\gamma=0,98$, $n=25$.

7. Для нормально распределенной генеральной совокупности найдите с надежностью 90% доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения по выборкам объема: а) 16; б) 25.

8. Для выборки из упр. 12 § 12 найдите с надежностью 80% доверительный интервал для неизвестной дисперсии.

§ 14. Распределение хи-квадрат

В предыдущем параграфе мы встретились со случайной величиной χ^2, закон распределения которой называется распределением хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы. Дадим теперь некоторые пояснения.

Определение. Пусть независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ распределены по нормальному закону с $a=0$ и $\sigma=1$. Закон распределения случайной величины

$$\chi^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2$$

называется хи-квадрат распределением с n степенями свободы.

В предыдущем параграфе мы имели дело с независимыми случайными величинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (их число n), каждая из которых распределена по нормальному закону (одному и тому же). Но случайная величина

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2$$

рассматривавшаяся там, не есть сумма независимых слагаемых, так как

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

т. е. слагаемые $(x_k-\bar{x})$ зависимы. Можно доказать, что кроме связи

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

между случайными величинами $(x_k-\bar{x})$ других нет. Поэтому их можно выразить линейно через другие случайные величины, которые уже независимы и число их будет равно $n-1$. Поскольку новые случайные величины выражаются через x_k линейно, а x_k распределены по нормальному закону, то и новые случайные величины тоже будут распределены по нормальному закону. При этом оказывается, что их математические ожидания равны нулю, а дисперсии равны единице. Поэтому введенная в § 13 случайная величина имеет распределение хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы.

Если бы между слагаемыми были связи, записываемые не одним, а k уравнениями, то и степеней свободы было бы $n-k$.

§ 15. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии

В § 9 была решена задача на нахождение доверительного интервала для математического ожидания нормального распределения, когда его дисперсия известна.

Теперь нам предстоит решить ту же задачу, но уже в условиях, когда дисперсия изучаемого нормального распределения неизвестна.

Пусть ξ — случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием a, которое нам неизвестно. Выборку $x_1, x_2, \ldots, x_n$ опять

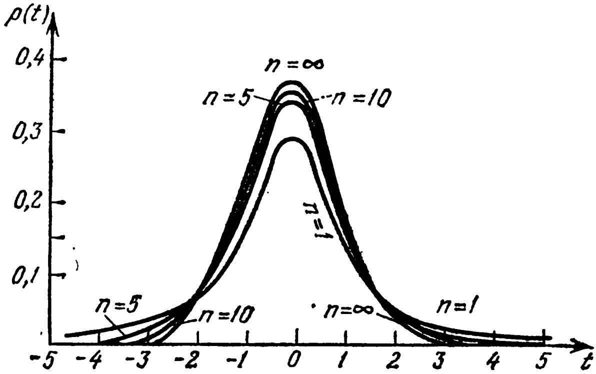


Рис. 62.

рассматриваем как n независимых случайных величин, каждая из которых распределена по тому же закону, что и случайная величина ξ. Вычислим арифметическое среднее $\bar{x}$ этой выборки (см. (1) на стр. 177) и выборочную дисперсию s^2 (см. (2) на стр. 177). Это случайные величины. Для решения поставленной задачи рассмотрим случайную величину

$$t = \frac{\bar{x} - a}{s/\sqrt{n}}.$$

В курсах математической статистики доказывается, что закон распределения случайной величины t не зависит ни от математического ожидания ξ, ни от ее дисперсии. На рис. 62 приведены графики плотностей вероятностей случайной величины t при различных n (это четные функции). Функция распределения случайной величины t называется *законом распределения Стьюдента* (или t-распределением) с $n-1$ степенями свободы. Для него (как и для нормального, и распределения хи-квадрат) в приложении 8 приведены таблицы, которыми пользуются при решении задач.

При заданной достоверности вычислений γ мы хотим найти такое число t_γ, чтобы выполнялось равенство

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}-a}{s/\sqrt{n}}\right|<t_\gamma\right)=\gamma. \quad (1)$$

На рис. 63 площадь заштрихованных фигур, ограниченных графиком плотности вероятностей t-распре-

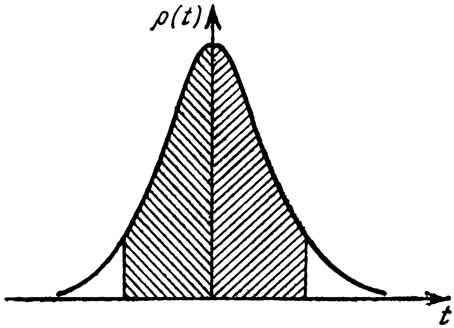


Рис. 63.

деления, равна этой вероятности. Так как плотности вероятностей t-распределения — функции четные, то площади левой и правой заштрихованных фигур равны.

Формулу (1) перепишем в равносильном виде, заменяя неравенство для модуля двойным неравенством:

$$P\left(\bar{x}-t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=\gamma. \quad (2)$$

По t-распределению для каждого числа γ $(0<\gamma<1)$ существует единственное число t_γ, удовлетворяющее равенству (1), а стало быть, и равенству (2). Соотношение (2) показывает, что интервал

$$\left(\bar{x}-t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

с достоверностью γ есть доверительный интервал для математического ожидания a случайной величины ξ.

Пример 1. Пусть из значений случайной величины, распределенной по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием a, сделана выборка объема $n=25$, для которой среднее арифметическое есть $\bar{x}=12{,}7$, а эмпирическая дисперсия — $s^2=0{,}25$. Найдем доверительный интервал для параметра a с надежностью 0,95.

Из таблиц распределения Стьюдента для $\gamma=0{,}95$ (т. е. для $q=1-\gamma=0{,}05$ и 24 степеней свободы) находим $t_\gamma=2{,}064$. Следовательно, доверительные границы суть

$$\bar{x}-t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}=12{,}7-2{,}064\cdot\frac{0{,}5}{5}\approx 12{,}5,$$

$$\bar{x}+t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}=12{,}7+2{,}064\cdot\frac{0{,}5}{5}\approx 12{,}9,$$

а математическое ожидание a покрывается доверительным интервалом (12,5; 12,9) с надежностью 0,95. Можно сказать, что $a\approx 12{,}7$ с точностью до 0,2 и надежностью 0,95.

Упражнения. С надежностью γ найдите доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности с неизвестной дисперсией по выборке объема n, если:

1. $n=25$, $\bar{x}=2{,}4$, $s^2=4$, $\gamma=0{,}9$.
2. $n=30$, $\bar{x}=1{,}93$, $s^2=0{,}6$, $\gamma=0{,}95$.
3. $n=120$, $\bar{x}=4{,}35$, $s^2=0{,}01$, $\gamma=0{,}99$.
4. $n=10$, $\bar{x}=9{,}3$, $s^2=0{,}1$, $\gamma=0{,}95$.
5. Для выборки из упр. 12 § 12 найдите с надежностью 90% доверительный интервал для математического ожидания, считая, что дисперсия неизвестна.

§ 16. Распределение Стьюдента

В предыдущем параграфе при решении задачи мы встретились с понятием случайной величины, распределенной по закону Стьюдента. Дадим теперь определение.

Определение. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, ξ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица, а η распределена по закону хи-квадрат с n степенями свободы. Тогда закон распределения случайной величины

$$t=\frac{\xi}{\sqrt{\eta}}$$

называется *законом Стьюдента с n степенями свободы* или *t-распределением* с n степенями свободы.

§ 17. Двумерное распределение

В ряде случаев результатом наблюдения может оказаться значение не одной случайной величины, а пары (в общем случае — нескольких случайных величин). Такое распределение называется двумерным (в общем случае — многомерным). Например, можно наблюдать за процентным содержанием воды в угле и его теплотворной способностью. В двумерной точечной диаграмме каждое наблюдение изображается точкой на плоскости, координаты которой суть наблюденные значения. Это показано на рис. 64.

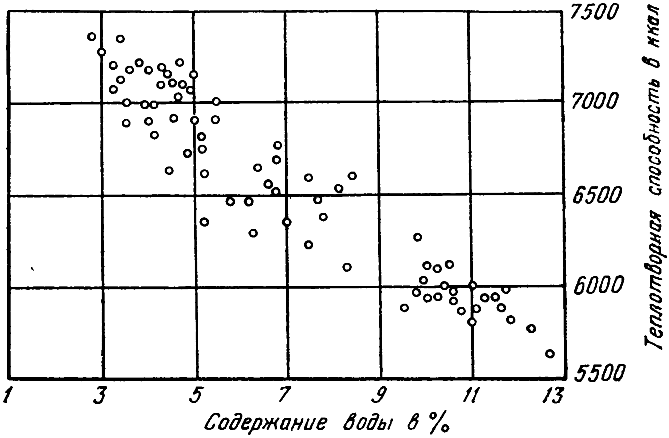


Рис. 64.

Точечная диаграмма дает наглядное представление о зависимости между наблюдаемыми случайными величинами. При этом случайными являются координаты отмеченных точек.

Результаты наблюдений можно записать в виде таблицы (стр. 198) с тем, чтобы потом провести ее математическую обработку. Например, в приведенной таблице даны результаты измерений удельного веса картофеля и процентное содержание в нем крахмала. Выборка имеет объем 560, а на пересечении строки и столбца таблицы дано число наблюдений с указанными удельным весом и указанным содержанием крахмала в процентах.

Таблица

Распределения 560 выборок картофеля по удельному весу (ξ) и содержанию крахмала (η)

η \ ξ	1,064	1,068	1,072	1,076	1,080	1,084	1,088	1,092	1,096	1,100	1,104	1,108	1,112	1,116	1,120	1,124	1,128	1,132	1,136	1,140	Всего
9,5	1																				1
10,5	1	1																			2
11,5			5	1																	6
12,5		1	5	2	3	1															12
13,5			1	2	7	9															19
14,5					6	9	11														26
15,5						3	19	18	6												46
16,5							11	30	43	10											94
17,5							1	11	33	54	6	1									106
18,5								2	4	39	43	22									110
19,5										2	22	35	16	1							76
20,5											1	6	22	9	1						39
21,5														11	3						14
22,5														1	1	4	1				7
23,5																1					1
24,5																					0
25,5																				1	1
Всего	2	2	11	5	16	22	42	61	86	105	72	64	38	22	5	5	1	0	0	1	560

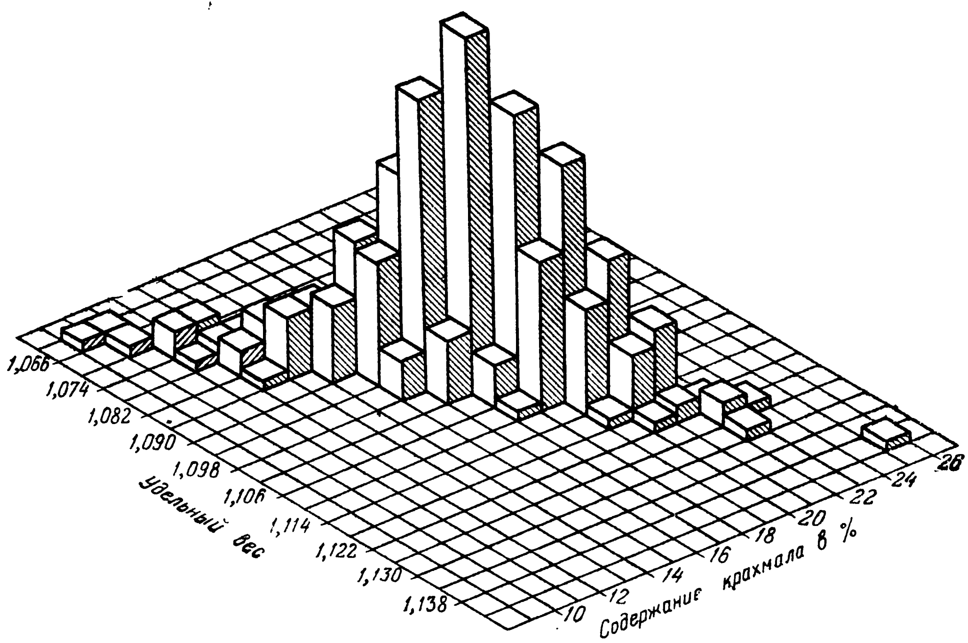

1,066
1,074
1,082
1,090
1,098
1,106
1,114
1,122
1,130
1,138
Удельный вес
10
12
14
16
18
20
22
24
26
Содержание крахмала в %

Рис. 65.

Такие таблицы называются *корреляционными таблицами*. Получаются они при группировке данных наблюдений по двум переменным так, как это делалось по одной переменной. Получившееся распределение может быть также представлено в виде гистограммы (рис. 65); высота параллелепипеда равна числу наблюденных значений, соответствующих клетке — основанию этого параллелепипеда. При соответствующем выборе масштаба можно считать, что число этих наблюдений равно объему такого параллелепипеда.

Рассматривая один столбец в таблице, мы изучаем условное распределение процентного содержания крахмала в картофеле при фиксированном удельном весе (например, при удельном весе 1,104). Для этого распределения (уже одной случайной величины) мы можем рассматривать выборочное среднее $\bar{x}$ и дисперсию s^2. Они называются *условным средним* и *условной дисперсией* при фиксированном значении второй случайной величины. Обозначим процент содержания крахмала в картофеле через η, а его удельный вес — через ξ.

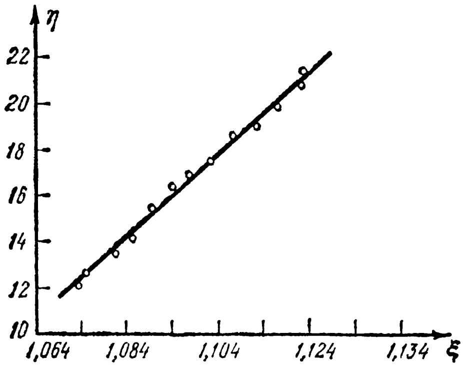


Рис. 66.

Проделав описанный подсчет для всех столбцов, нанесем точки, координатами которых являются условное среднее (при фиксированном удельном весе) и соответствующее значение удельного веса. На рис. 66 видно, что эти точки приблизительно расположились по прямой. Она называется *линией регрессии случай-*

ной величины η *по* ξ. В общем случае не обязательно получается прямая. Могут получиться кривые регрессии случайной величины η по ξ.

Можно рассматривать не столбцы, а строки корреляционной таблицы. Тогда, проделав аналогичные вычисления, мы получаем кривую регрессии случайной величины ξ по η.

Эти кривые характеризуют наличие или отсутствие зависимости между рассматриваемыми случайными величинами.

Пользуясь этой же таблицей, подсчитывают приближенно коэффициент корреляции случайных величин ξ и η:

$$r(\xi;\ \eta) \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{s_\xi} \frac{y_i - \bar{y}}{s_\eta}.$$

Здесь $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, ..., $(x_n;\ y_n)$ — совместно наблюденные значения случайных величин ξ и η (соответственно); $\bar{x}$ есть среднее по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\bar{y}$ — среднее по выборке $y_1, y_2, \ldots, y_n$; s_ξ^2 — выборочная дисперсия по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$; s_η^2 — выборочная дисперсия по выборке $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

По данным нашей таблицы

$$r(\xi;\ \eta) \approx 0{,}934.$$

§ 18. Понятие о теории ошибок

Представим себе процесс измерения, например диаметра валика. Каждое измерение связано с некоторой погрешностью. Эти погрешности обычно подразделяют на систематические и случайные. Систематические ошибки измерений связаны с неточным инструментом, с особенностью того, кто измеряет (у каждого лаборанта есть своя систематическая, делаемая им ошибка, которую обычно он знает), и т. п. Эти ошибки обычно присутствуют во всей серии измерений, их просто проконтролировать и исключить. Такими ошибками мы заниматься не будем, и далее предполагается, что в измерениях систематические ошибки отсутствуют.

Случайные же ошибки присутствуют в каждой серии измерений. Они зависят от многих разнохарактерных причин, которые постоянно меняются в процессе измерения и привносят, независимо от экспериментатора, некоторый вклад в результаты измерений. В качестве таких причин можно указать изменение температуры (которое по-разному влияет на образец и на измерительный прибор), изменение давления, износ инструмента, изменение угла зрения при считывании результатов и многие другие. В силу этих причин даже в наблюдениях, проведенных с одной и той же точностью, будут получаться различные результаты.

Обычно производится серия n независимых измерений величины, имеющей истинное значение a. Измерения проводятся в одних и тех же условиях, с одной и той же точностью. В силу влияния случайных факторов в результате измерений получается ряд чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти числа можно рассматривать как значения n случайных величин (их мы будем обозначать теми же буквами), которые имеют один и тот же закон распределения (поскольку измерения ведутся без изменения условий измерений) и независимы (поскольку измерения ведутся независимым образом). Принято считать, что эти случайные величины распределены по нормальному закону. Поводом для этого служит такое соображение, высказанное около двухсот лет назад Гауссом: случайная ошибка есть сумма большого числа случайных величин (факторов, влияющих на эту ошибку, о которых говорилось выше), которые независимы и удовлетворяют условиям центральной предельной теоремы (так как каждый из этих факторов незначителен). Естественно, что математическое ожидание каждой случайной величины x_k равно a (измеряемой величине). Таким образом, мы находимся уже в знакомой ситуации; требуется найти математическое ожидание случайной величины, которая распределена по нормальному закону, для которого не известна дисперсия. Эта задача решалась в § 15.

Пример 1. Проведены 9 независимых и равноточных измерений. Их среднее арифметическое равно 37,261, а выборочная дисперсия 25. Оценим истинное значение измеряемой величины с надежностью 0,95.

Истинное значение a (как это отмечалось выше) равно математическому ожиданию. Следовательно, нам надо найти доверительный интервал для математического ожидания с надежностью 0,95. По таблицам распределения Стьюдента для $\gamma = 0{,}95$ и $n = 9$ находим $t_\gamma = 2{,}306$ (здесь $q = 0{,}05$, а число степеней свободы равно числу измерений 9 без одного, т. е. 8). Тогда

$$t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}306 \cdot \frac{5}{3} = 3{,}84,$$

доверительные границы суть

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 37{,}261 - 3{,}84 = 33{,}421,$$

$$\bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 37{,}261 + 3{,}84 = 41{,}001,$$

а доверительный интервал —

$$(33{,}421;\ 41{,}001).$$

§ 19. Эмпирическое определение вероятности события

Как правило, нам не известны вероятности тех событий, которые нас интересуют. Для их нахождения приходится проводить эксперимент. Простейшая схема Бернулли (которая была уже нами описана) состоит в n-кратном повторении опыта независимым образом и вычислении частоты появления при этом события. Эта частота $\bar{p}$ и принимается в качестве точечной оценки для вероятности p события. Свяжем эти сведения со статистическим материалом: рассмотрим n случайных величин ξ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$); случайная величина ξ_k такова, что $\xi_k = 1$, если в опыте с номером k произошло интересующее нас событие, и $\xi_k = 0$, если в опыте с номером k это событие не произошло. Так как опыты проводятся независимым образом, то введенные случайные величины независимы. Все они одинаково распределены, их закон распределения таков:

ξ_k	1	0
P	p	q

$k = 1, 2, \ldots, n,$

$q = 1 - p.$

Частота появления события в n опытах может быть записана через случайные величины ξ_k:

$$\bar{p}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k.$$

Тогда (как это уже было подсчитано на стр. 146)

$$M\bar{p}=p,$$

т. е. точечная оценка p несмещенная. В курсах статистики доказывается, что она эффективна.

Теперь мы перейдем к построению доверительного интервала для вероятности p случайного события.

Поскольку параметр p оказался математическим ожиданием случайной величины, то мы пришли к задаче, которая уже была решена. Однако в рассматриваемой задаче есть особенность—случайная величина p дискретна. Кроме того, ее математическое ожидание p и дисперсия $pq=p(1-p)$ (см. пример 1, стр. 95) функционально связаны, что упрощает решение задачи.

Начнем с более простого случая, когда n велико. Тогда можно считать, что случайная величина $\bar{p}$ распределена приблизительно по нормальному закону. Если pn и qn больше четырех, то этим допущением уже можно пользоваться (этого мы доказывать не будем). Таким образом, случайная величина p распределена по нормальному закону с математическим ожиданием p и дисперсией $\sigma^2=\frac{pq}{n}$. Как на стр. 195, по заданной надежности γ находим число t_γ такое, что

$$P(|\bar{p}-p|<t_\gamma\sigma)=\gamma,$$

т. е. с надежностью γ выполнено неравенство

$$|\bar{p}-p|<\sigma t_\gamma=\sqrt{\frac{pq}{n}}\,t_\gamma=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,t_\gamma,$$

что эквивалентно неравенству

$$(\bar{p}-p)^2<\frac{p(1-p)}{n}t_\gamma^2. \qquad (1)$$

Из последнего неравенства, пользуясь найденным из опыта численным значением $\bar{p}$, находим доверительный интервал для искомой вероятности p: вычисления сводятся к решению квадратного неравенства (которое получается после переноса всех членов полученного неравенства влево)

$$\left(1+\frac{t_\gamma^2}{n}\right)p^2-\left(2\bar{p}+\frac{t_\gamma^2}{n}\right)p+\bar{p}^2<0. \qquad (2)$$

Так как старший коэффициент у квадратного трехчлена положителен, то решением неравенства (2) является интервал $(p_1;\ p_2)$, где p_1 и p_2 — корни этого квадратного трехчлена:

$$p_1=\frac{\bar{p}+\frac{t_\gamma^2}{2n}-t_\gamma\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}+\frac{t_\gamma^2}{4n^2}}}{1+\frac{t_\gamma^2}{n}},$$

$$p_2=\frac{\bar{p}+\frac{t_\gamma^2}{2n}+t_\gamma\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}+\frac{t_\gamma^2}{4n^2}}}{1+\frac{t_\gamma^2}{n}}.$$

Итак, интервал $(p_1;\ p_2)$ есть доверительный интервал для вероятности p с надежностью γ.

К приведенному решению можно дать геометрическую иллюстрацию. Рассмотрим на плоскости декартову систему координат, у которой по оси абсцисс откладывается частота $\bar{p}$, а по оси ординат — вероятность p (рис. 67). Тогда множество точек этой плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству (1), есть внутренность изображенного на рисунке эллипса. Для того чтобы построить доверительный интервал при полученном из эксперимента значении $\bar{p}$, надо рассмотреть множество точек этого эллипса с фиксированным $\bar{p}$ — этот отрезок и будет искомым. На рисунке доверительный интервал показан на оси ординат.

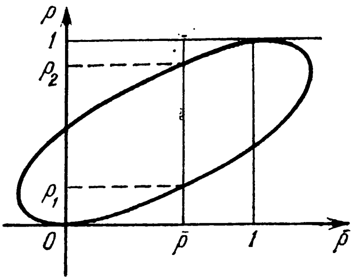


Рис. 67.

Пример 1. Событие A в серии из 100 опытов произошло 78 раз. Найдем доверительный интервал для вероятности события A с надежностью 0,9.

Частота появления события A есть $\bar{p}=0{,}78$. Так как

$$np \approx n\bar{p}=78, \quad nq \approx n(1-\bar{p})=22,$$

т. е. np и nq много больше четырех, то можно пользоваться приведенным выше правилом. Из таблиц нормального распределения находим для $\gamma=0{,}9$ число $t_\gamma=1{,}643$. Тогда, по выведенным выше формулам,

$$p_1=\frac{0{,}78+\frac{1{,}643^2}{200}-1{,}643\cdot\sqrt{\frac{0{,}78\cdot 0{,}22}{100}+\frac{1{,}643^2}{4\cdot 100^2}}}{1+\frac{1{,}643^2}{100}}=0{,}705,$$

$$p_2=\frac{0{,}78+\frac{1{,}643^2}{200}+1{,}643\cdot\sqrt{\frac{0{,}78\cdot 0{,}22}{100}+\frac{1{,}643^2}{4\cdot 100^2}}}{1+\frac{1{,}643^2}{100}}=0{,}840.$$

Следовательно, доверительный интервал (0,705; 0,840) покрывает истинное значение вероятности события A с надежностью 90%.

Из формул для p_1 и p_2 при больших n получаются приближенные формулы

$$p_1 \approx \bar{p}-t_\gamma\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}},$$

$$p_2 \approx \bar{p}+t_\gamma\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}.$$

Их можно использовать при больших n ($n>100$), если $np,\ nq>10$.

Пример 2. В 200 независимых повторениях опыта событие A произошло 70 раз. Построим доверительный интервал для вероятности события A с надежностью 0,85.

Частота есть $\bar{p}=0{,}35$, надежность — $\gamma=0{,}85$, по таблицам нормального распределения находим $t_\gamma=1{,}439$. Так как

$$t_\gamma\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}=1{,}439\cdot\sqrt{\frac{0{,}35\cdot 0{,}65}{200}}\approx 0{,}048,$$

то доверительный интервал (по приближенным формулам) есть

$$(0{,}302;\ 0{,}398).$$

Если бы мы пользовались точными формулами для вычисления p_1 и p_2, то получили бы доверительный интервал (0,304; 0,396). Вы видите, что отличия практически нет.

Перейдем теперь к построению доверительных интервалов при малом числе опытов. В этом случае надо пользоваться точной (а не приближенной) функцией распределения частоты $\bar{p}$. В § 4 было установлено, что вероятность того, что событие A произошло m раз при n-кратном независимом повторении опыта, равна $C_n^m p^m q^{n-m}$, где $p=P(A)$ и $q=1-p$. Следовательно, функция распределения частоты $\bar{p}$ при $0<x<1$ будет

$$F(x)=P(\bar{p}<x)=\sum_{m<xn} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Рассмотрим теперь функцию от p, определенную равенством

$$\varphi(p)=\sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ее производная есть

$$\varphi'(p)=\Big((1-p)^n+np(1-p)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}p^2(1-p)^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}p^m(1-p)^{n-m}\Big)'=$$
$$=-n(1-p)^{n-1}+n(1-p)^{n-1}-n(n-1)p(1-p)^{n-2}+$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2p(1-p)^{n-2}-\frac{n(n-1)}{2}p^2(n-2)(1-p)^{n-3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}mp^{m-1}(1-p)^{n-m}-$$
$$-\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}p^m(n-m)(1-p)^{n-m-1}=$$
$$=-(n-m)C_n^m p^m(1-p)^{n-m-1}.$$

Для p из интервала (0; 1) эта производная отрицательна. Следовательно, на отрезке [0; 1] эта функция убывает от значения $\varphi(0)=1$ до $\varphi(1)=0$. Кроме того, эта функция непрерывна. Поэтому каждое значение от 0 до 1 она принимает только один раз, т. е. при любом числе h $(0 \leqslant h \leqslant 1)$ существует единственное решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k q^{n-k} = h.$$

Найти это решение можно приближенно по таблицам биномиального распределения.

По заданной надежности γ (пользуясь таблицей 9) и числу опытов m, в которых произошло событие A, найдем числа p_1 и p_2 такие, что (рис. 68)

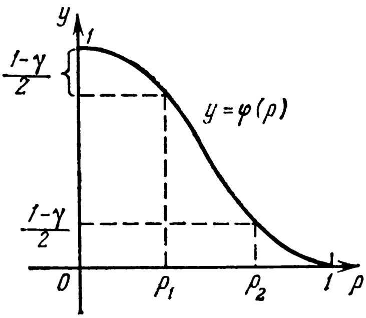


Рис. 68.

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k p_2^k q_2^{n-k} = \frac{1-\gamma}{2},$$

$$\sum_{k=m}^{n} C_n^k p_1^k q_1^{n-k} = \frac{1-\gamma}{2}.$$

Тогда, в силу убывания записанной функции по переменной p, при $p > p_2$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k q^{n-k} < \frac{1-\gamma}{2}.$$

А так как

$$\sum_{k=m}^{n} C_n^k p_1^k q^{n-k} = 1 - \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k q^{n-k},$$

то это возрастающая функция от переменной p, и потому при $p < p_1$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} < \frac{1-\gamma}{2}.$$

Левые части вписанных неравенств суть вероятности того, что при указанных значениях p событие A произошло не более m раз. Но оно произошло m раз, и, следовательно, слева выписана вероятность происшедшего события. Поэтому для p из интервала $(p_1; p_2)$ вероятность того, что событие A произошло m раз, равна $1-2\frac{1-\gamma}{2}=\gamma$. Таким образом, $(p_1; p_2)$ есть доверительный интервал для вероятности события A с надежностью γ.

Пример 3. В семи опытах событие A произошло 2 раза. Найдем с надежностью 0,8 доверительный интервал для $P(A)$.

В этом примере $n=7$, $k=2$ и $\gamma=0{,}8$. Тогда $\frac{1-\gamma}{2}=0{,}1$ и по таблице 9 с $n=7$ и $k=2$ ищем 0,1. Соответствующее значение p есть $p_1=0{,}08$. В том же столбце ищем число $\frac{\gamma+1}{2}=0{,}9$. Соответствующее значение p есть $p_2=0{,}46$. Следовательно, доверительный интервал будет (0,08; 0,46) с надежностью в 80%.

Упражнения. По схеме Бернулли было проведено n опытов, и в m из них произошло событие A. Найдите с надежностью γ доверительный интервал для вероятности события A, если:

1. $n=9$, $m=3$, $\gamma=80\%$.
2. $n=9$, $m=3$, $\gamma=90\%$.
3. $n=9$, $m=3$, $\gamma=96\%$.
4. $n=9$, $m=3$, $\gamma=98\%$.
5. $n=10$, $m=4$, $\gamma=80\%$.
6. $n=10$, $m=4$, $\gamma=90\%$.
7. $n=10$, $m=4$, $\gamma=98\%$.
8. $n=7$, $m=5$, $\gamma=80\%$.
9. $n=7$, $m=5$, $\gamma=90\%$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Несобственные интегралы

В курсе высшей математики рассматриваются интегралы, для которых пределами интегрирования являются числа (говорят: «интегралы в конечных пределах»). В ряде случаев приходится иметь дело с интегралами, у которых один или оба предела интегрирования бесконечны, т. е. промежуток интегрирования либо полупрямая, либо вся прямая. Такие интегралы называются несобственными.

Приведем определение несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Геометрически для неотрицательной подынтегральной функции этот интеграл тоже дает площадь криволи-

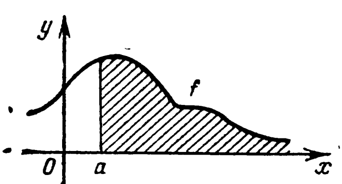


Рис. 69.

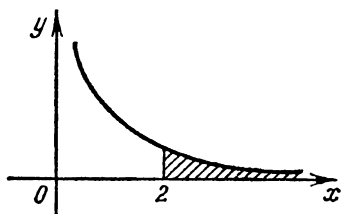


Рис. 70.

нейной трапеции, ограниченной графиком подынтегральной функции, осью абсцисс и прямой $x=a$ (рис. 69).

Если предел в правой части равенства (1) существует, то интеграл называется *сходящимся*. Если этого предела не существует, то интеграл называется *расходящимся*. В курсах математического анализа доказывается, что все основные правила вычисления интегралов и их свойства сохраняются для несобственных интегралов.

Например, вычислим интеграл:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_2^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, заданный интеграл сходится. Геометрически проделанное вычисление означает, что площадь фигуры, заштрихованной на рис. 70, равна 0,5.

Обычно так подробно вычисления не проводят и пишут

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_2^{+\infty} = -0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

понимая под подстановкой верхнего предела интегрирования переход к пределу при $x \to +\infty$.

Например, пользуясь тем, что степенная функция растет быстрее логарифмической, при интегрировании по частям имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} \ln x\, d\,\frac{-1}{x} = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\frac{dx}{x} =$$

$$= -0 + \frac{\ln 1}{1} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -0 + 1 = 1.$$

Интегралы с бесконечным нижним пределом определяются аналогично:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Например,

$$\int_{-\infty}^{0} 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{\ln 2} - 0 = \frac{1}{\ln 2}.$$

Интеграл, оба предела интегрирования которого бесконечны, определяется равенством (аналогично предыдущим случаям)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Например (вычисления тоже ведутся сокращенно),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

2. Вычисление интеграла Пуассона

Рассмотрим объем V тела, образованного вращением вокруг оси Oy бесконечной фигуры, ограниченной графиком функции $y=e^{-x^2/2}$ и осью Ox (рис. 71). Этот

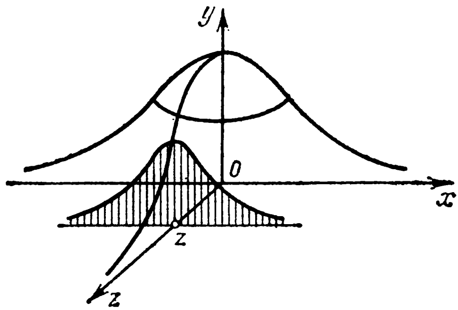


Рис. 71.

объем подсчитаем двумя способами. Сначала по формуле для объемов тел вращения имеем

$$V = 2\pi \int_0^{+\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = -2\pi \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,d\left(-\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= -2\pi e^{-x^2/2}\Big|_0^{+\infty} = 0 + 2\pi = 2\pi.$$

А теперь подсчитаем объем этого же тела «по поперечным сечениям». Возьмем ось Oz, перпендикулярную осям Ox и Oy. При вращении вокруг оси Oy графика функции $y=e^{-x^2/2}$ получается поверхность с уравнением $y=e^{-(x^2+z^2)/2}$. Эта поверхность вместе с плоскостью xOz ограничивает интересующий нас объем V. Проведем плоскость, перпендикулярную оси Oz. В сечении получится плоская фигура (на рис. 71 она заштрихована). Ее площадь есть функция от z (координаты точки пересечения секущей плоскости с осью Oz):

$$S(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+z^2)/2}\,dx=e^{-z^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx,$$

так как при интегрировании по x переменная z остается постоянной. Теперь вычислим объем тела по известным поперечным сечениям $S(z)$:

$$V=\int_{-\infty}^{+\infty} S(z)\,dz=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-z^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx\right)dz=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}\,dz=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right)^2.$$

Сравнивая получившиеся результаты, приходим к равенству

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right)^2=2\pi,$$

откуда для интеграла Пуассона (так как этот интеграл есть положительное число) следует формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx=\sqrt{2\pi}.$$

3. Формула Стирлинга

Подсчитаем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=\ln x$ и опирающейся на отрезок $[1;\ n]$ (рис. 72), двумя способами. Сначала, пользуясь определенным интегралом, имеем

$$S=\int_1^n \ln x\,dx=x\ln x\,|_1^n-\int_1^n x\,\frac{dx}{x}=$$

$$=n\ln n-1\cdot\ln 1-(n-1)=n\ln n-n+1. \qquad (1)$$

Эту же площадь S можно подсчитать, разбив криволинейную трапецию на полосы прямыми $x=k$, $k \in Z$ (рис. 72):

$$S=\sum_{k=1}^{n-1} S_k, \tag{2}$$

где S_k — площадь k-й полосы. Подсчитаем теперь S_k, проведя хорду. Получается трапеция (рис. 73) и за-

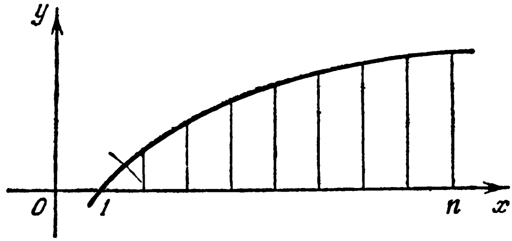


Рис. 72.

штрихованный сегмент, площадь которого обозначим через σ_k:

$$S_k=\frac{1}{2}(\ln k+\ln(k+1))+\sigma_k.$$

Оценим σ_k. Для этого проведем к графику логарифма касательную в точке с абсциссой $k+1/2$ (рис. 74).

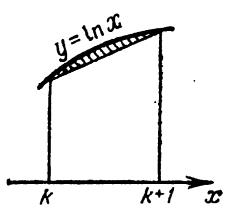


Рис. 73.

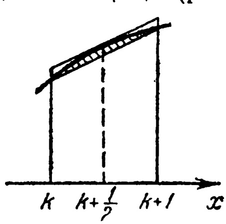


Рис. 74.

Из рисунка ясно, что σ_k меньше разности площадей трапеций:

$$0<\sigma_k<\ln\left(k+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(\ln k+\ln(k+1))=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(k+1/2)^2}{k(k+1)}=\frac{1}{2}\ln\frac{k^2+k+1/4}{k^2+k}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1/4}{k(k+1)}\right)<\frac{1/8}{k(k+1)}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Поэтому

$$S=\sum_{k=1}^{n-1} S_k=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}(\ln k+\ln(k+1))+\sigma_k\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\ln k-\frac{1}{2}\ln n+\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k, \qquad (3)$$
$$0<\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{8}.$$

Таким образом, $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sigma_k$ есть возрастающая и ограниченная последовательность. Следовательно, она имеет предел. Обозначим его σ. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k=\sigma+\alpha_n, \qquad (4)$$

где α_n — бесконечно малая последовательность.

Сравнивая (1), (3) и (4), приходим к равенству

$$n\ln n-n+1=\sum_{k=1}^{n}\ln k-\frac{1}{2}\ln n+\sigma+\alpha_n,$$

откуда

$$\ln(n!)=n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln n+1-\sigma-\alpha_n,$$

т. е.

$$n!=\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1-\sigma}e^{-\alpha_n}.$$

А так как α_n — бесконечно малая последовательность, то $q_n=e^{-\alpha_n}$ имеет предел, равный единице.

Таким образом, положив $a=e^{1-\sigma}$, получаем предварительную формулу

$$n!=a\sqrt{n}\left(\frac{n}{a}\right)^n q_n, \quad \text{где } \lim_{n\to\infty} q_n=1. \qquad (5)$$

Для определения коэффициента a потребуются некоторые вспомогательные факты.

I. Докажем (при натуральном n) равенство

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\delta_n, \qquad (6)$$

где $n!!$ есть произведение натуральных чисел, не больших n и той же четности ($8!! = 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2$, $5!! = 5\cdot 3\cdot 1$), а

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Например,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}; \quad \int_0^{\pi/2} \sin^7 x\,dx = \frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3} = \frac{16}{35}.$$

Проинтегрируем по частям ($n \geqslant 2$):

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,d(-\cos x) =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx,$$

т. е. мы получили равенство

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx.$$

Перенося второе слагаемое справа в левую часть, имеем

$$n\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx,$$

или

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx.$$

Последовательно применяя это равенство, получаем

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx =$$

$$= \frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-4} x\,dx = \ldots$$

При четном n при этом получится

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2}\,\ldots\,\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^0 x\,dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\,\frac{\pi}{2},$$

а при нечетном

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2}\ldots\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot 1.$$

Формула (6) доказана.

II. Докажем теперь формулу Валлиса

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \pi. \qquad (7)$$

Для доказательства запишем серию неравенств (так как $|\sin x| \leqslant 1$):

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+2} x\,dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx.$$

По формуле (6) вычисляем интегралы:

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\,\frac{\pi}{2} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}.$$

Делим почленно это неравенство на $\dfrac{(2n-1)!!\,n}{(2n)!!\,(2n+1)}$:

$$\frac{2n+1}{2n+2}\,\frac{2n+1}{2n}\,\pi < \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < \frac{2n+1}{2n}\,\pi.$$

Поскольку правая и левая части этого неравенства имеют предел, равный π, то, в силу теоремы о промежуточной функции, отсюда следует формула (7).

Теперь, пользуясь формулой Валлиса, можно определить коэффициент a в равенстве (5):

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{((2n)!!)^2}{(2n)!}\right)^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2^n\cdot n!)^2}{(2n)!}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\frac{2^{4n}\left(a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n q_n\right)^4}{\left(a\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} q_{2n}\right)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\frac{2^{4n}a^4n^2n^{4n}e^{-4n}q_n^4}{a^2 2n 2^{4n}n^{4n}e^{-4n}q_{2n}^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^2q_n^4}{2q_{2n}^2} = \frac{a^2}{2},$$

т. е.

$$a^2 = 2\pi,$$

откуда, в силу положительности числа a, получаем

$$a = \sqrt{2\pi}.$$

Подставляя найденное значение коэффициента a в равенство (5), приходим к формуле Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n q_n, \text{ где } \lim_{n\to\infty} q_n = 1.$$

4. Теоремы Лапласа

Пользуясь формулой Стирлинга, мы можем доказать локальную теорему Лапласа.

Теорема 1. *Пусть событие A происходит в опыте S с вероятностью $p = P(A)$ и не происходит с вероятностью $q = 1 - p$. Опыт S повторили n раз независимым образом. Тогда вероятность того, что событие A произошло m раз, равна*

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)\lambda_n, \qquad (1)$$

где

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 1,$$

если n и m таковы, что

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \qquad (2)$$

есть ограниченная функция при n, стремящемся к бесконечности.

Для доказательства теоремы нам потребуется

Лемма 1. *Пусть z — действительное число, $z > -1$. Тогда*

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \alpha z^2, \quad \text{где} \quad \lim_{z\to 0} \alpha(z) = 0.$$

В самом деле,

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{dt}{1+t} = \int_0^z \frac{1-t^2+t^2}{1+t}\,dt =$$

$$= \int_0^z \left(1 - t + \frac{t^2}{1+t}\right) dt = z - \frac{z^2}{2} + \int_0^z \frac{t^2 dt}{1+t}. \qquad (3)$$

Оценим последнее слагаемое. Поскольку мы рассматриваем $z \to 0$, то можем ограничиться значениями z, удовлетворяющими неравенству $|z| < 1/2$. Для таких z, поскольку переменная t принадлежит промежутку с концами 0 и z, тоже выполнено неравенство $|t| < 1/2$ и

$$0 \leqslant \frac{t^2}{1+t} < \frac{t^2}{1/2} = 2t^2,$$

так что

$$|\alpha| = \left|\frac{1}{z^2}\int_0^z \frac{t^2 dt}{1+t}\right| \leqslant \frac{1}{z^2}\left|\int_0^z 2t^2\,dt\right| = \frac{1}{z^2}\left|\frac{2}{3}z^3\right| = \frac{2}{3}|z|$$

есть бесконечно малая при $z \to 0$, что и требовалось доказать.

Переходим к доказательству теоремы. Из равенства (2) следует

$$\frac{m}{n} = p\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right), \qquad (4)$$

$$1 - \frac{m}{n} = q\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right). \qquad (5)$$

Перепишем теперь левую часть равенства (1) с помощью формулы Стирлинга:

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!\, p^m q^{n-m}}{m!\,(n-m)!} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \mu_n \cdot p^m q^{n-m}}{\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m \mu_m \sqrt{2\pi(n-m)}\left(\frac{n-m}{e}\right)^{n-m} \mu_{n-m}} \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{\Lambda_n p^m q^{n-m}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{m}{n}\right)^{m+1/2}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-m+1/2}} \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{\Lambda_n p^m q^{n-m}}{\sqrt{2\pi n}\, p^{m+1/2}\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^{m+1/2}} \times$$

$$\times \frac{1}{q^{n-m+1/2}\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{n-m+1/2}} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{\Lambda_n}{\sqrt{2\pi npq}\, A}. \qquad (6)$$

(1) $\Lambda_n = \frac{\mu_n}{\mu_m \mu_{n-m}}$, и потому $\lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_n = 1$; кроме того, и числитель и знаменатель разделили на n^{n+1}.

(2) Воспользовались формулами (4) и (5).

(3) Положили

$$A = \left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^{m+1/2}\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{n-m+1/2}.$$

Вычислим теперь $\ln A$, пользуясь леммой:

$$\ln A = \left(m+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) +$$

$$+\left(n-m+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) =$$

$$= \left(m+\frac{1}{2}\right)\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2}{2}\frac{q}{np} + \alpha_1\frac{x^2}{2}\frac{p}{np}\right) +$$

$$+\left(n-m+\frac{1}{2}\right)\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2}{2}\frac{p}{nq} + \alpha_2\frac{x^2}{2}\frac{p}{nq}\right) =$$

$$= B + xC + x^2 D, \qquad (7)$$

где α_1 и α_2 — бесконечно малые при $n \to \infty$. Подсчитаем теперь коэффициенты B, C и D (всюду ниже через α_i обозначены бесконечно малые при $n \to \infty$):

$$C = \left(m + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{q}{np}} - \left(n - m + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{p}{nq}} =$$

$$= m\left(\sqrt{\frac{q}{np}} + \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) - n\sqrt{\frac{p}{nq}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{np}} -$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{nq}} = m\frac{q+p}{\sqrt{npq}} - \frac{np}{\sqrt{npq}} + \alpha_3 = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} +$$

$$+ \alpha_3 = x + \alpha_3 \qquad (8)$$

в силу равенства (2) и того, что $p+q=1$. В силу (4) и (5)

$$D = -\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{q}{2np} - \left(n - m + \frac{1}{2}\right)\frac{p}{2nq} =$$

$$= -\frac{mq}{n2p} - \left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{p}{2q} + \alpha_4 = -\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\frac{q}{2} -$$

$$-\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\frac{p}{2} + \alpha_4 = -\frac{q+p}{2} + \alpha_5 = -\frac{1}{2} + \alpha_5, \qquad (9)$$

$$B = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\alpha_1}{n} + \left(n - m + \frac{1}{2}\right)\frac{\alpha_2}{n} =$$

$$= \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{2n}\right)\alpha_1 + \left(1 - \frac{m}{n} + \frac{1}{2n}\right)\alpha_2 = \alpha_6. \qquad (10)$$

Подставляя (8)—(10) в (7), получаем

$$\ln A = x(x + \alpha_3) + x^2\left(-\frac{1}{2} + \alpha_5\right) + \alpha_6 = \frac{x^2}{2} + \alpha,$$

где α — бесконечно малая при $n \to \infty$. Следовательно,

$$A = e^{x^2/2}e^{\alpha}.$$

Подставляя найденное значение A в (6), получаем

$$P_{m,n} = \frac{\Lambda_n}{\sqrt{2\pi npq}\, e^{x^2/2}\, e^{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)\left(\frac{\Lambda_n}{e^{\alpha}}\right).$$

Здесь второй множитель есть $\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$ в силу (2), а предел третьего множителя при $n \to \infty$ равен 1 — это λ_n в формуле (1). Теорема доказана.

Переходим ко второй теореме Лапласа — интегральной.

Теорема 1. *В условиях локальной теоремы Лапласа*

$$\sum_{m=k}^{l} P_{m,n} = \lambda_n \left(\Phi\left(\frac{l-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)\right),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 1$.

Для доказательства рассмотрим график функции $y=\varphi(x)$ (рис. 75) и точки $x_m = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $m=k, k+1, \ldots, l$.

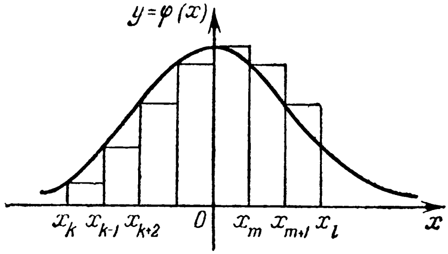


Рис. 75.

Площади отмеченных на рисунке прямоугольников легко подсчитываются:

$$s_m = \varphi(x_m)(x_{m+1} - x_m) = \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)\frac{1}{\sqrt{npq}} \approx P_{m,n}$$

в силу формулы (1). Поскольку площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=\varphi(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=x_k$ и $x=x_l$, приближенно равна $\sum\limits_{m=k}^{l-1} s_m$, а $0 < P_{m,n} < \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$, то

$$\sum_{m=k}^{l} P_{m,n} \approx \sum_{m=k}^{l-1} P_{m,n} \approx \sum_{m=k}^{l-1} s_m \approx S =$$

$$= \int_{x_k}^{x_l} \varphi(t)\,dt = \Phi(x_l) - \Phi(x_k) = \Phi\left(\frac{l-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

в силу формулы Ньютона—Лейбница, так как $\Phi' = \varphi$. Интегральная теорема Лапласа доказана, поскольку при $n \to \infty$ приближенные равенства переходят в точные.

В ряде случаев приходится подсчитывать число подмножеств заданного множества. В этом состоят простейшие задачи комбинаторики. Начнем с основных принципов комбинаторики — принципа суммы и принципа произведения.

Принцип суммы. Если множество A содержит n элементов, а множество B — m элементов и $A \cap B = \varnothing$, то множество $A \cup B$ содержит $n+m$ элементов.

Доказательство проводится простым пересчетом элементов множества $A \cup B$. Сначала пересчитываем все элементы, входящие в множество A. Они получают номера от 1 до n. Среди них нет элементов множества B, так как $A \cap B = \varnothing$. Следовательно, когда мы переходим к пересчету элементов, принадлежащих множеству B, начинать придется с номера $n+1$. Далее будет номер $n+2$, $n+3$ и т. д. до $n+m$, поскольку в множестве B по условию m элементов. Этим все элементы множества $A \cup B$ будут исчерпаны, они получили номера от 1 до $m+n$; следовательно, $A \cup B$ содержит $n+m$ элементов.

Принцип суммы по индукции распространяется на k множеств.

Принцип произведения. Пусть заданы два множества

$$A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n\}, \quad B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_m\},$$

первое — из n, а второе — из m элементов. Тогда множество всех возможных пар

$$C = \{(a_i;\ b_j) \mid i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$$

содержит nm элементов.

Доказательство. Разобьем множество C на непересекающиеся подмножества

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(a_1;\ b_j) \mid j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m\}, \\ C_2 &= \{a_2;\ b_j) \mid j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_l &= \{(a_l;\ b_j) \mid j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m\}. \end{aligned}$$

Поскольку C_1 состоит только из пар, содержащих a_1, а C_2 — только из пар, содержащих a_2, то $C_1 \cap C_2 = \varnothing$.

Аналогично получаем, что $C_i \cap C_k = \varnothing$ при $i \neq k$. Докажем далее, что

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i.$$

Действительно, пусть $(a_i; b_j)$ — любая пара. Она входит и в левую часть (по определению множества C) и в правую, так как $(a_i; b_j) \in C_i$ (по определению множества C_i). Так как каждое подмножество C_i содержит m элементов, то, в силу принципа суммы, число элементов в их объединении равно nm.

Пример 1. Имеются 8 красных и 5 зеленых шаров. Сколько можно образовать разноцветных пар, если все шары перенумерованы (номера с 1 по 8 — красные шары и с 9 по 13 — зеленые)?

В силу принципа произведения число всех пар равно $8 \cdot 5 = 40$.

Если множество состоит из элементов a, b и c, то нам безразличен порядок, в котором указаны элементы

$$\{a;\ b;\ c\} = \{b;\ a;\ c\} = \{c;\ a;\ b\} = \ldots$$

Но есть задачи, в которых порядок следования элементов не безразличен. При этом указывается, какой элемент считается первым, какой — вторым, третьим и т. д. Установленный в конечном множестве порядок называют *перестановкой* его элементов. Число перестановок в множестве из n элементов обозначают P_n. Докажем, что

$$P_n = n!, \qquad (1)$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ \ldots \ n$ по определению.

На первое место мы можем поставить любой из n элементов множества; тогда оставшиеся $n-1$ мест занимает некоторая перестановка из $n-1$ элементов, число таких перестановок P_{n-1}. Таким образом, перестановка из n элементов заданного множества может рассматриваться как пара: на первом месте — элемент множества, на втором месте — перестановка оставшихся $n-1$ элементов (таких перестановок P_{n-1}). В силу принципа произведения число всех перестановок (всех таких пар) есть

$$P_n = nP_{n-1}.$$

Из этой формулы получаем

$$P_n = nP_{n-1} = n(n-1)P_{n-2} = n(n-1)(n-2)P_{n-3} = \ldots$$
$$\ldots = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 2\cdot 1.$$

Множество с заданным порядком расположения его элементов называют *упорядоченным множеством*. Упорядоченные множества записывают, располагая их элементы в круглых скобках:

$$(a;\ b;\ c),\ (b;\ a;\ c),\ (c;\ b;\ a),\ \ldots$$

(все выписанные упорядоченные множества различны). Конечные упорядоченные множества называют *размещениями*. Нас интересует такая задача: сколько упорядоченных множеств по m элементов в каждом можно получить из заданного множества, содержащего n элементов? Или короче: сколько существует размещений из n по m? Число этих размещений обозначают A_n^m. Докажем, что

$$A_n^m = n(n-1)\ \ldots\ (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (2)$$

Первое место в размещении можно занять любым из n элементов множества. Оставшиеся $m-1$ мест занимает размещение из $n-1$ по $m-1$, их число A_{n-1}^{m-1}. Таким образом, размещение из n по m можно рассматривать как пару: на первом месте — один из n элементов множества, а на втором месте — размещение из $n-1$ по $m-1$, их число A_{n-1}^{m-1}. В силу принципа произведения число размещений из n по m есть

$$A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}.$$

Пользуясь этой формулой, получим

$$A_n^m = nA_{n-1}^{m-1} = n(n-1)A_{n-2}^{m-2} = n(n-1)(n-2)A_{n-3}^{m-3} = \ldots$$
$$\ldots = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-m+1).$$

Пример 2. Для ведения собрания нужно избрать президиум в составе 3 человек из 30: председатель, секретарь и член президиума. Сколькими способами это можно сделать?

Из множества 30 собравшихся человек надо выбрать упорядоченное множество из 3 человек (председатель, секретарь, член президиума), т. е. нас интересует размещение из 30 по 3: $A_{30}^3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,360$ — столькими способами собрание может выбрать президиум.

И последняя задача, которую мы рассмотрим: сколько подмножеств по m элементов в каждом существует у множества, состоящего из n элементов? В комбинаторике конечные множества называются *сочетаниями*, а поставленная задача коротко формулируется так: каково число сочетаний из n по m? Число сочетаний из n и m обозначается C_n^m. Докажем, что

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{3}$$

Из каждого m-элементного подмножества множества, состоящего из n элементов, получается $m!$ упорядоченных множеств (из тех же элементов, из которых состоит взятое подмножество). Следовательно, число всех упорядоченных m-элементных подмножеств заданного множества из n элементов и число m-элементных подмножеств того же множества связаны равенством

$$m!\,C_n^m = A_n^m,$$

откуда

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Пример 3. Собранию из 30 человек надо выбрать 3 делегата на конференцию. Сколькими способами это можно сделать?

Из множества в 30 человек надо выбрать подмножество в 3 человека. Это можно сделать $C_{30}^3 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4060$ способами.

6. Таблица значений функций

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \text{ и } \Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$$

x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$
0,00	0,000000	0,398942	0,45	0,173645	0,360527
01	003989	398922	46	177242	358890
02	007978	398862	47	180822	357225
03	011966	398763	48	184386	355533
04	015953	398623	49	187933	353812
05	019939	398444	50	191462	352065
06	023922	398225	51	194974	350292
07	027903	397966	52	198468	349493
08	031881	397668	53	201944	346668
09	035856	397330	54	205401	344818
10	039828	396953	55	208840	342944
11	043795	396536	56	212260	341046
12	047758	396080	57	215661	339124
13	051717	395585	58	219043	337180
14	055670	395052	59	222405	335213
15	059618	394479	60	225747	333225
16	063559	393868	61	229069	331215
17	067495	393219	62	232371	329184
18	071424	392531	63	235653	327133
19	075345	391806	64	238914	325062
20	079260	391043	65	242154	322972
21	083166	390242	66	245373	320864
22	087064	389404	67	248571	318737
23	090954	388529	68	251748	316593
24	094835	387617	69	254903	314432
25	098706	386668	70	258036	312254
26	102568	385683	71	261148	310060
27	106420	384663	72	264238	307851
28	110261	383606	73	267305	305627
29	114092	382515	74	270350	303389
30	117911	381388	75	273373	301137
31	121720	380226	76	276373	298872
32	125516	379031	77	279350	296595
33	129300	377801	78	282305	294305
34	133072	376537	79	285236	292004
35	136831	375240	80	288145	289692
36	140576	373911	81	291030	287369
37	144309	372548	82	293892	285036
38	148027	371154	83	296731	282694
39	151732	369728	84	299546	280344
40	155422	368270	85	302337	277985
41	159097	366782	86	305105	275618
42	162757	365263	87	307850	273244
43	166402	363714	88	310570	270864
44	170031	362135	89	313267	268477

x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$
0,90	0,315940	0,266085	1,45	0,426471	0,139431
91	318589	263688	46	427855	137417
92	321214	261286	47	429219	135418
93	323814	258881	48	430563	133435
94	326391	256471	49	431888	131468
95	328944	254059	50	433193	129518
96	331472	251644	51	434478	127583
97	333977	249228	52	435745	125665
98	336457	246809	53	436992	123763
99	338913	244390	54	438220	121878
1,00	341345	241971	55	439429	120009
01	343752	239551	56	440620	118157
02	346136	237132	57	441792	116323
03	348495	234714	58	442947	114505
04	350830	232297	59	444083	112704
05	353141	229882	60	445201	110921
06	355428	227470	61	446301	109155
07	357690	225060	62	447384	107406
08	359929	222653	63	448449	105675
09	362143	220251	64	449497	103961
10	364334	217852	65	450529	102265
11	366500	215458	66	451543	100586
12	368643	213069	67	452540	098925
13	370762	210686	68	453521	097282
14	372857	208308	69	454486	095657
15	374928	205936	70	455435	094049
16	376976	203571	71	456367	092459
17	379000	201214	72	457284	090887
18	381000	198863	73	458185	089333
19	382977	196520	74	459070	087796
20	384930	194186	75	459941	086277
21	386861	191860	76	460796	084776
22	388768	189543	77	461636	083293
23	390651	187235	78	462462	081828
24	392512	184937	79	463273	080380
25	394350	182649	80	464070	078950
26	396165	180371	81	464852	077538
27	397958	178104	82	465620	076143
28	399727	175847	83	466375	074766
29	401475	173602	84	467116	073407
30	403200	171369	85	467843	072065
31	404902	169147	86	468557	070740
32	406582	166937	87	469258	069433
33	408241	164740	88	469946	068144
34	409877	162555	89	470621	066871
35	411492	160383	90	471283	065616
36	413085	158225	91	471933	064378
37	414657	156080	92	472571	063157
38	416207	153948	93	473197	061952
39	417736	151831	94	473810	060765
40	419243	149727	95	474412	059595
41	420730	147639	96	475002	058441
42	422196	145564	97	475581	057304
43	423641	143505	98	476148	056183
44	425066	141460	99	476705	055079

x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$
2,00	0,477250	0,053991	2,50	0,493790	0,017528
01	477784	052919	51	493963	017095
02	478308	051825	52	494132	016670
03	478822	050824	53	494297	016254
04	479325	049800	54	494457	015848
05	479818	048792	55	494614	015449
06	480301	047800	56	494766	015060
07	480774	046823	57	494915	014678
08	481237	045861	58	495060	014305
09	481691	044915	59	495201	013940
10	482136	043984	60	495339	013583
11	482571	043067	61	495473	013234
12	482997	042166	62	495604	012892
13	483414	041280	63	495731	012558
14	483823	040408	64	495855	012232
15	484222	039550	65	495975	011912
16	484614	038707	66	496093	011600
17	484997	037878	67	496207	011295
18	485371	037063	68	496319	010997
19	485738	036262	69	496427	010706
20	486097	035475	70	496533	010421
21	486447	034701	71	496636	010143
22	486791	033941	72	496736	009871
23	487126	033194	73	496833	009606
24	487455	032460	74	496928	009347
25	487776	031740	75	497020	009094
26	488089	031032	76	497110	008846
27	488396	030337	77	497197	008605
28	488696	029655	78	497282	008370
29	488989	028985	79	497365	008140
30	489276	028327	80	497445	007915
31	489556	027682	81	497523	007697
32	489830	027048	82	497599	007483
33	490097	026426	83	497673	007274
34	490358	025817	84	497744	007071
35	490613	025218	85	497814	006873
36	490863	024631	86	497882	006679
37	491106	024056	87	497948	006491
38	491344	023491	88	498012	006307
39	491576	022937	89	498074	006127
40	491802	022395	90	498134	005953
41	492024	021862	91	498193	005782
42	492240	021341	92	498250	005616
43	492451	020829	93	498305	005454
44	492656	020328	94	498359	005296
45	492857	019837	95	498411	005143
46	493053	019356	96	498462	004993
47	493244	018885	97	498511	004847
48	493431	018423	98	498559	004705
49	493613	017971	99	498605	004564

x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$
3,00	0,498650	0,004432	3,50	0,499767	0,000873
01	498694	004301	51	499776	000843
02	498736	004173	52	499784	000814
03	498777	004049	53	499792	000785
04	498817	003928	54	499800	000758
05	498856	003810	55	499807	000732
06	498893	003695	56	499815	000706
07	498930	003584	57	499822	000681
08	498965	003475	58	499828	000657
09	498999	003370	59	499835	000634
10	499032	003267	60	499841	000612
11	499065	003167	61	499847	000590
12	499096	003070	62	499853	000569
13	499126	002975	63	499858	000549
14	499155	002884	64	499864	000529
15	499184	002794	65	499869	000510
16	499211	002707	66	499874	000492
17	499238	002623	67	499879	000474
18	499264	002541	68	499883	000457
19	499289	002461	69	499888	000441
20	499313	002384	70	499892	000425
21	499336	002309	71	499896	000409
22	499359	002236	72	499900	000394
23	499381	002165	73	499904	000380
24	499402	002096	74	499908	000366
25	499423	002029	75	499912	000353
26	499443	001964	76	499915	000340
27	499462	001901	77	499918	000327
28	499481	001840	78	499922	000315
29	499499	001780	79	499925	000303
30	499517	001723	80	499928	000292
31	499534	001667	81	499931	000281
32	499550	001612	82	499933	000271
33	499566	001560	83	499936	000260
34	499581	001508	84	499938	000251
35	499596	001459	85	499941	000241
36	499610	001411	86	499943	000232
37	499624	001364	87	499946	000223
38	499638	001319	88	499948	000215
39	499651	001275	89	499950	000207
40	499663	001232	3,9	$0{,}49^{3}75952$	0,000199
41	499675	001191	4,0	$0{,}49^{3}84164$	0,000134
42	499687	001151	4,1	$0{,}49^{3}89671$	0,000097
43	499698	001112	4,2	$0{,}49^{4}3327$	0,000059
44	499709	001075	4,4	$0{,}49^{4}7294$	0,000025
45	499720	001038	4,7	$0{,}49^{5}3496$	0,000006
46	499730	001003	5,0	$0{,}49^{6}8567$	0,000001
47	499740	000969			
48	499749	000936			
49	499758	000904			

7. Таблица решений уравнения $P(\chi^2 > x^2) = q$ для распределения хи-квадрат с n степенями свободы

n \ q	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,66
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,1
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,3
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5

n \ q	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6	12,4	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,8	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31	34	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34	37	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37	40	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40	43	45,3
21	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
22	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5	46	48,3
23	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0	47,5	49,7
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,5	51,2
25	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47	50	52,6
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48	51,5	54,1
27	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,5	53	55,5
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51	54,5	56,9
29	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,5	56	58,3
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	54	57,5	59,7

8. Таблица решений уравнения $P(|t| > x) = q$ для случайной величины t, распределенной по закону Стьюдента с n степенями свободы

n \ q	0,1	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,003	0,002	0,001
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,3	212,2	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	18,216	22,327	31,600
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	8,891	10,214	12,922
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	6,435	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,376	5,893	6,869
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	4,800	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,442	4,785	5,408
8	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	4,199	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690	4,024	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	3,892	4,144	4,587
12	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	3,706	3,930	4,318
14	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	3,583	3,787	4,140
16	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	3,494	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,428	3,610	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,376	3,552	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,335	3,505	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,302	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,274	3,435	3,704
28	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,250	3,408	3,674
30	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030	3,230	3,386	3,646
40	1,684	2,021		2,423	2,704				3,551
60	1,671	2,000		2,390	2,660				3,460
80		1,990		2,374	2,639				3,415
120	1,658	1,980		2,36	2,62				3,37
200		1,972		2,345	2,601				3,339
500		1,965		2,334	2,586				3,310
∞	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	2,968	3,090	3,291

9. Таблица для биномиального распределения *)

p	$n=2,\ k=2$	$n=2,\ k=1$	$n=3,\ k=3$	$n=3,\ k=2$	$n=3,\ k=1$
0,01	0,0001000	0,0199000	0,0000010	0,0002980	0,0297010
0,02	0,0004000	0,0396000	0,0000080	0,0011840	0,0588080
0,03	0,0009000	0,0591000	0,0000270	0,0026460	0,0873270
0,04	0,0016000	0,0784000	0,0000640	0,0046720	0,1152640
0,05	0,0025000	0,0975000	0,0001250	0,0072500	0,1426250
0,06	0,0036000	0,1164000	0,0002160	0,0103680	0,1694160
0,07	0,0049000	0,1351000	0,0003430	0,0140140	0,1956430
0,08	0,0064000	0,1536000	0,0005120	0,0181760	0,2213120
0,09	0,0081000	0,1719000	0,0007290	0,0228420	0,2464290
0,10	0,0100000	0,1900000	0,0010000	0,0280000	0,2710000
0,11	0,0121000	0,2079000	0,0013310	0,0336380	0,2950310
0,12	0,0144000	0,2256000	0,0017280	0,0397440	0,3185280
0,13	0,0169000	0,2431000	0,0021970	0,0463060	0,3414970
0,14	0,0196000	0,2604000	0,0027440	0,0533120	0,3639440
0,15	0,0225000	0,2775000	0,0033750	0,0607500	0,3858750
0,16	0,0256000	0,2944000	0,0040960	0,0686080	0,4072960
0,17	0,0289000	0,3111000	0,0049130	0,0768740	0,4282130
0,18	0,0324000	0,3276000	0,0058320	0,0855360	0,4486320
0,19	0,0361000	0,3439000	0,0068590	0,0945820	0,4685590
0,20	0,0400000	0,3600000	0,0080000	0,1040000	0,4880000
0,21	0,0441000	0,3759000	0,0092610	0,1137780	0,5069610
0,22	0,0484000	0,3916000	0,0106480	0,1239040	0,5254480
0,23	0,0529000	0,4071000	0,0121670	0,1343660	0,5434670
0,24	0,0576000	0,4224000	0,0138240	0,1451520	0,5610240
0,25	0,0625000	0,4375000	0,0156250	0,1562500	0,5781250
0,26	0,0676000	0,4524000	0,0175760	0,1676480	0,5947760
0,27	0,0729000	0,4671000	0,0196830	0,1793340	0,6109830
0,28	0,0784000	0,4816000	0,0219520	0,1912960	0,6267520
0,29	0,0841000	0,4959000	0,0243890	0,2035220	0,6420890
0,30	0,0900000	0,5100000	0,0270000	0,2160000	0,6570000
0,31	0,0961000	0,5239000	0,0297910	0,2287180	0,6714910
0,32	0,1024000	0,5376000	0,0327680	0,2416640	0,6855680
0,33	0,1089000	0,5511000	0,0359370	0,2548260	0,6992370
0,34	0,1156000	0,5644000	0,0393040	0,2681920	0,7125040
0,35	0,1225000	0,5775000	0,0428750	0,2817500	0,7253750
0,36	0,1296000	0,5904000	0,0466560	0,2954880	0,7378560
0,37	0,1369000	0,6031000	0,0506530	0,3093940	0,7499530
0,38	0,1444000	0,6156000	0,0548720	0,3234560	0,7616720
0,39	0,1521000	0,6279000	0,0593190	0,3376620	0,7730190
0,40	0,1600000	0,6400000	0,0640000	0,3520000	0,7840000
0,41	0,1681000	0,6519000	0,0689210	0,3664580	0,7946210
0,42	0,1764000	0,6636000	0,0740880	0,3810240	0,8048880
0,43	0,1849000	0,6751000	0,0795070	0,3956860	0,8148070
0,44	0,1936000	0,6864000	0,0851840	0,4104320	0,8243840
0,45	0,2025000	0,6975000	0,0911250	0,4252500	0,8336250
0,46	0,2116000	0,7084000	0,0973360	0,4401280	0,8425360
0,47	0,2209000	0,7191000	0,1038230	0,4550540	0,8511230
0,48	0,2304000	0,7296000	0,1105920	0,4700160	0,8593920
0,49	0,2401000	0,7399000	0,1176490	0,4850020	0,8673490
0,50	0,2500000	0,7500000	0,1250000	0,5000000	0,8750000

*) В таблице приведены значения вероятности $\sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$ — в n независимых опытах (в каждом из которых событие происходит с вероятностью p и не происходит с вероятностью $q=1-p$) событие произошло не менее k раз.

p	$n=4,\ k=4$	$n=4,\ k=3$	$n=4,\ k=2$	$n=4,\ k=1$	$n=5,\ k=5$
0,01	0,0000000	0,0000040	0,0005920	0,0394040	0,0000000
0,02	0,0000002	0,0000315	0,0023365	0,0776318	0,0000000
0,03	0,0000008	0,0001056	0,0051864	0,1147072	0,0000000
0,04	0,0000026	0,0002483	0,0090957	0,1506534	0,0000001
0,05	0,0000062	0,0004812	0,0140188	0,1854938	0,0000003
0,06	0,0000130	0,0008251	0,0199109	0,2192510	0,0000008
0,07	0,0000240	0,0013000	0,0267280	0,2519480	0,0000017
0,08	0,0000410	0,0019251	0,0344269	0,2836070	0,0000033
0,09	0,0000656	0,0027192	0,0429648	0,3142504	0,0000059
0,10	0,0001000	0,0037000	0,0523000	0,3439000	0,0000100
0,11	0,0001464	0,0048848	0,0623912	0,3725776	0,0000161
0,12	0,0002074	0,0062899	0,0731981	0,4003046	0,0000249
0,13	0,0002856	0,0079312	0,0846808	0,4271024	0,0000371
0,14	0,0003842	0,0098235	0,0968005	0,4529918	0,0000538
0,15	0,0005062	0,0119812	0,1095188	0,4779938	0,0000759
0,16	0,0006554	0,0144179	0,1227981	0,5021286	0,0001049
0,17	0,0008352	0,0171464	0,1366016	0,5254168	0,0001420
0,18	0,0010498	0,0201787	0,1508933	0,5478782	0,0001890
0,19	0,0013032	0,0235264	0,1656376	0,5695328	0,0002476
0,20	0,0016000	0,0272000	0,1808000	0,5904000	0,0003200
0,21	0,0019448	0,0312096	0,1963464	0,6104992	0,0004084
0,22	0,0023426	0,0355643	0,2122437	0,6298494	0,0005154
0,23	0,0027984	0,0402728	0,2284592	0,6484696	0,0006436
0,24	0,0033178	0,0453427	0,2449613	0,6663782	0,0007963
0,25	0,0039062	0,0507812	0,2617188	0,6835938	0,0009766
0,26	0,0045698	0,0565947	0,2787013	0,7001342	0,0011881
0,27	0,0053144	0,0627888	0,2958792	0,7160176	0,0014349
0,28	0,0061466	0,0693683	0,3132237	0,7312614	0,0017210
0,29	0,0070728	0,0763376	0,3307064	0,7458832	0,0020511
0,30	0,0081000	0,0837000	0,3483000	0,7599000	0,0024300
0,31	0,0092352	0,0914584	0,3659776	0,7733288	0,0028629
0,32	0,0104858	0,0996147	0,3837133	0,7861862	0,0033554
0,33	0,0118592	0,1081704	0,4014816	0,7984888	0,0039135
0,34	0,0133634	0,1171259	0,4192581	0,8102526	0,0045435
0,35	0,0150063	0,1264812	0,4370188	0,8214938	0,0052522
0,36	0,0167962	0,1362355	0,4547405	0,8322278	0,0060466
0,37	0,0187416	0,1463872	0,4724008	0,8424704	0,0069344
0,38	0,0208514	0,1569339	0,4899781	0,8522366	0,0079235
0,39	0,0231344	0,1678728	0,5074512	0,8615416	0,0090224
0,40	0,0256000	0,1792000	0,5248000	0,8704000	0,0102400
0,41	0,0282576	0,1909112	0,5420048	0,8788264	0,0115856
0,42	0,0311170	0,2030011	0,5590469	0,8868350	0,0130691
0,43	0,0341880	0,2154640	0,5759080	0,8944400	0,0147008
0,44	0,0374810	0,2282931	0,5925709	0,9016550	0,0164916
0,45	0,0410062	0,2414812	0,6090188	0,9084937	0,0184528
0,46	0,0447746	0,255020	0,6252357	0,9149694	0,0205963
0,47	0,0487968	0,2689016	0,6412064	0,9210952	0,0229345
0,48	0,0530842	0,2831155	0,6569165	0,9268838	0,0254804
0,49	0,0576480	0,2976520	0,6723520	0,9323480	0,0282475
0,50	0,0625000	0,3125000	0,6875000	0,9375000	0,0312500

p	$n=5,\ k=4$	$n=5,\ k=3$	$n=5,\ k=2$	$n=5,\ k=1$	$n=6,\ k=6$
0,01	0,0000000	0,0000099	0,0009801	0,0490100	0,0000000
0,02	0,0000008	0,0000776	0,0038424	0,0960792	0,0000000
0,03	0,0000040	0,0002580	0,0084721	0,1412660	0,0000000
0,04	0,0000124	0,0006022	0,0147580	0,1846273	0,0000000
0,05	0,0000300	0,0011581	0,0225925	0,2261191	0,0000000
0,06	0,0000617	0,0019703	0,0318713	0,2660960	0,0000000
0,07	0,0001133	0,0030799	0,0424934	0,3043116	0,0000001
0,08	0,0001917	0,0045253	0,0543613	0,3409185	0,0000003
0,09	0,0003044	0,0063413	0,0673805	0,3759679	0,0000005
0,10	0,0004600	0,0085600	0,0814600	0,4095100	0,0000010
0,11	0,0006676	0,0112105	0,0965117	0,4415941	0,0000018
0,12	0,0009373	0,0143189	0,1124509	0,4722681	0,0000030
0,13	0,0012795	0,0179086	0,1291956	0,5015791	0,0000048
0,14	0,0017057	0,0220003	0,1466673	0,5295730	0,0000075
0,15	0,0022275	0,0266119	0,1647900	0,5562947	0,0000114
0,16	0,0028574	0,0317587	0,1834910	0,5817881	0,0000168
0,17	0,0036081	0,0374538	0,2027002	0,6060959	0,0000241
0,18	0,0044930	0,0437073	0,2223506	0,6292602	0,0000340
0,19	0,0055256	0,0505275	0,2423777	0,6513216	0,0000470
0,20	0,0067200	0,0579200	0,2627200	0,6723200	0,0000640
0,21	0,0080904	0,0658883	0,2833185	0,6922944	0,0000858
0,22	0,0096513	0,0744338	0,3041169	0,7112826	0,0001134
0,23	0,0114175	0,0835557	0,3250616	0,7293216	0,0001480
0,24	0,0134038	0,0932512	0,3461014	0,7464475	0,0001911
0,25	0,0156250	0,1035156	0,3671875	0,7626953	0,0002441
0,26	0,0180962	0,1143424	0,3882738	0,7780993	0,0003089
0,27	0,0208325	0,1257232	0,4093166	0,7926928	0,0003874
0,28	0,0238487	0,1376478	0,4302743	0,8065082	0,0004819
0,29	0,0271596	0,1501045	0,4511077	0,8195771	0,0005948
0,30	0,0307800	0,1630800	0,4717800	0,8319300	0,0007290
0,31	0,0347244	0,1765593	0,4922565	0,8435969	0,0008875
0,32	0,0390070	0,1905263	0,5125016	0,8546066	0,0010737
0,33	0,0436419	0,2049631	0,5324940	0,8649875	0,0012915
0,34	0,0486426	0,2198509	0,5521962	0,8747667	0,0015448
0,35	0,0540225	0,2351694	0,5715850	0,8839709	0,0018383
0,36	0,0597943	0,2508973	0,5906359	0,8926258	0,0021768
0,37	0,0659705	0,2670122	0,6093266	0,9007563	0,0025657
0,38	0,0725627	0,2834907	0,6276368	0,9083867	0,0030109
0,39	0,0795824	0,3003084	0,6455465	0,9155404	0,0035187
0,40	0,0870400	0,3174400	0,6630400	0,9222400	0,0040960
0,41	0,0949456	0,3348596	0,6801017	0,9285076	0,0047501
0,42	0,1033083	0,3525403	0,6967179	0,9343643	0,0054890
0,43	0,1121367	0,3704549	0,7128768	0,9398308	0,0063214
0,44	0,1214383	0,3885753	0,7285679	0,9449268	0,0072563
0,45	0,1312200	0,4068731	0,7437825	0,9496716	0,0083038
0,46	0,1414876	0,4253194	0,7585132	0,9540835	0,0094743
0,47	0,1522460	0,4438849	0,7727541	0,9581805	0,0107792
0,48	0,1634992	0,4625400	0,7865008	0,9619796	0,0122306
0,49	0,1752500	0,4812550	0,7997501	0,9654975	0,0138413
0,50	0,1875000	0,5000000	0,8125000	0,9687500	0,0156250

p	$n=6,\ k=5$	$n=6,\ k=4$	$n=6,\ k=3$	$n=6,\ k=2$	$n=6,\ k=1$
0,01	0,0000000	0,0000001	0,0000196	0,0014604	0,0585199
0,02	0,0000000	0,0000023	0,0001529	0,0056871	0,1141576
0,03	0,0000001	0,0000116	0,0005044	0,0124559	0,1670280
0,04	0,0000006	0,0000360	0,0011684	0,0215528	0,2172422
0,05	0,0000018	0,0000864	0,0022298	0,0327738	0,2649081
0,06	0,0000044	0,0001762	0,0037643	0,0459248	0,3101302
0,07	0,0000095	0,0003210	0,0058389	0,0608207	0,3530098
0,08	0,0000184	0,0005384	0,0085121	0,0772859	0,3936450
0,09	0,0000328	0,0008477	0,0118348	0,0951534	0,4321307
0,10	0,0000550	0,0012700	0,0158500	0,1142650	0,4685590
0,11	0,0000878	0,0018273	0,0205936	0,1344708	0,5030187
0,12	0,0001344	0,0025431	0,0260947	0,1556289	0,5355959
0,13	0,0001986	0,0034413	0,0323759	0,1776055	0,5663738
0,14	0,0002850	0,0045469	0,0394537	0,2002741	0,5954328
0,15	0,0003987	0,0058852	0,0473386	0,2235157	0,6228505
0,16	0,0005453	0,0074816	0,0560359	0,2472185	0,6487020
0,17	0,0007312	0,0093619	0,0655457	0,2712775	0,6730596
0,18	0,0009637	0,0115516	0,0758631	0,2955943	0,6959933
0,19	0,0012504	0,0140760	0,0869790	0,3200770	0,7175705
0,20	0,0016000	0,0169600	0,0988800	0,3446400	0,7378560
0,21	0,0020216	0,0202280	0,1115487	0,3692034	0,7569125
0,22	0,0025253	0,0239035	0,1249641	0,3936934	0,7748004
0,23	0,0031216	0,0280093	0,1391020	0,4180414	0,7915776
0,24	0,0038221	0,0325671	0,1539352	0,4421844	0,8073001
0,25	0,0046387	0,0375977	0,1694336	0,4660645	0,8220215
0,26	0,0055842	0,0431203	0,1855646	0,4896285	0,8357935
0,27	0,0066722	0,0491530	0,2022934	0,5128282	0,8486658
0,28	0,0079168	0,0557124	0,2195832	0,5356198	0,8606859
0,29	0,0093326	0,0628136	0,2373955	0,5579638	0,8718997
0,30	0,0109350	0,0704700	0,2556900	0,5798250	0,8823510
0,31	0,0127400	0,0786932	0,2744255	0,6011720	0,8920818
0,32	0,0147640	0,0874932	0,2935593	0,6219773	0,9011325
0,33	0,0170239	0,0968779	0,3130483	0,6422168	0,9095416
0,34	0,0195372	0,1068534	0,3328483	0,6618702	0,9173460
0,35	0,0223218	0,1174239	0,3529148	0,6809201	0,9245811
0,36	0,0253958	0,1285914	0,3732032	0,6993523	0,9312805
0,37	0,0287777	0,1403559	0,3936685	0,7171556	0,9374765
0,38	0,0324864	0,1527154	0,4142660	0,7343215	0,9431998
0,39	0,0365408	0,1656655	0,4349512	0,7508441	0,9484796
0,40	0,0409600	0,1792000	0,4556800	0,7667200	0,9533440
0,41	0,0457632	0,1933103	0,4764088	0,7819481	0,9578195
0,42	0,0509696	0,2079858	0,4970949	0,7965294	0,9619313
0,43	0,0565983	0,2232135	0,5176963	0,8104670	0,9657036
0,44	0,0626682	0,2389786	0,5381721	0,8237658	0,9691590
0,45	0,0691980	0,2552639	0,5584823	0,8364326	0,9723194
0,46	0,0762063	0,2720502	0,5785885	0,8484755	0,9752051
0,47	0,0837109	0,2893163	0,5984534	0,8599045	0,9778356
0,48	0,0917294	0,3070388	0,6180412	0,8707306	0,9802294
0,49	0,1002787	0,3251942	0,6373176	0,8809663	0,9824037
0,50	0,1093750	0,3437500	0,6562500	0,8906250	0,9843750

p	n=7, k=7	n=7, k=6	n=7, k=5	n=7, k=4	n=7, k=3
0,01	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000340
0,02	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000053	0,0002636
0,03	0,0000000	0,0000000	0,0000005	0,0000264	0,0008630
0,04	0,0000000	0,0000000	0,0000020	0,0000813	0,0019838
0,05	0,0000000	0,0000001	0,0000060	0,0001936	0,0037570
0,06	0,0000000	0,0000003	0,0000147	0,0003915	0,0062940
0,07	0,0000000	0,0000008	0,0000313	0,0007072	0,0096876
0,08	0,0000000	0,0000017	0,0000600	0,0011763	0,0140140
0,09	0,0000000	0,0000034	0,0001061	0,0018366	0,0193335
0,10	0,0000001	0,0000064	0,0001765	0,0027280	0,0256915
0,11	0,0000002	0,0000112	0,0002791	0,0038916	0,0331201
0,12	0,0000004	0,0000188	0,0004234	0,0053693	0,0416388
0,13	0,0000006	0,0000300	0,0006202	0,0072028	0,0512558
0,14	0,0000011	0,0000464	0,0008817	0,0094339	0,0619685
0,15	0,0000017	0,0000695	0,0012216	0,0121032	0,0737652
0,16	0,0000027	0,0001013	0,0016551	0,0152503	0,0866251
0,17	0,0000041	0,0001443	0,0021984	0,0189131	0,1005201
0,18	0,0000061	0,0002014	0,0028695	0,0231276	0,1154147
0,19	0,0000089	0,0002757	0,0036873	0,0279276	0,1312677
0,20	0,0000128	0,0003712	0,0046720	0,0333440	0,1480320
0,21	0,0000180	0,0004923	0,0058450	0,0394053	0,1656562
0,22	0,0000249	0,0006440	0,0072285	0,0461368	0,1840845
0,23	0,0000340	0,0008320	0,0088458	0,0535606	0,2032581
0,24	0,0000459	0,0010625	0,0107209	0,0616955	0,2231150
0,25	0,0000610	0,0013428	0,0128784	0,0705566	0,2435913
0,26	0,0000803	0,0016805	0,0153436	0,0801558	0,2646212
0,27	0,0001046	0,0020843	0,0181420	0,0905009	0,2861378
0,28	0,0001349	0,0025637	0,0212996	0,1015962	0,3080735
0,29	0,0001725	0,0031288	0,0248421	0,1134424	0,3303603
0,30	0,0002187	0,0037908	0,0287955	0,1260360	0,3529305
0,31	0,0002751	0,0045618	0,0331855	0,1393702	0,3757169
0,32	0,0003436	0,0054546	0,0380373	0,1534344	0,3986531
0,33	0,0004262	0,0064832	0,0433757	0,1682141	0,4216739
0,34	0,0005252	0,0076622	0,0492247	0,1836917	0,4447157
0,35	0,0006434	0,0090075	0,0556075	0,1998457	0,4677167
0,36	0,0007836	0,0105356	0,0625462	0,2166517	0,4906169
0,37	0,0009493	0,0122642	0,0700617	0,2340816	0,5133587
0,38	0,0011442	0,0142116	0,0781734	0,2521046	0,5358871
0,39	0,0013723	0,0163973	0,0868994	0,2706869	0,5581494
0,40	0,0016384	0,0188416	0,0962560	0,2897920	0,5800960
0,41	0,0019475	0,0215655	0,1062575	0,3093807	0,6016799
0,42	0,0023054	0,0245909	0,1169164	0,3294116	0,6228574
0,43	0,0027182	0,0279404	0,1282428	0,3498411	0,6435877
0,44	0,0031928	0,0316375	0,1402448	0,3706237	0,6638333
0,45	0,0037367	0,0357062	0,1529277	0,3917222	0,6835599
0,46	0,0043582	0,0401710	0,1662945	0,4130579	0,7027366
0,47	0,0050662	0,0450571	0,1803454	0,4346107	0,7213354
0,48	0,0058707	0,0503900	0,1850779	0,4563199	0,7393321
0,49	0,0067822	0,0561956	0,2104864	0,4781337	0,7567054
0,50	0,0078125	0,0625000	0,2265625	0,5000000	0,7934375

p	n=7, k=2	n=7, k=1	n=8, k=8	n=8, k=7	n=8, k=6
0,01	0,0020310	0,0679347	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,02	0,0078565	0,1318745	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,03	0,0170930	0,1920172	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,04	0,0293803	0,2485525	0,0000000	0,0000000	0,0000001
0,05	0,0443805	0,3016627	0,0000000	0,0000000	0,0000004
0,06	0,0617771	0,3518224	0,0000000	0,0000000	0,0000012
0,07	0,0812739	0,3982991	0,0000000	0,0000001	0,0000029
0,08	0,1025946	0,4421534	0,0000000	0,0000002	0,0000064
0,09	0,1254814	0,4832390	0,0000000	0,0000004	0,0000127
0,10	0,1496944	0,5217031	0,0000000	0,0000007	0,0000234
0,11	0,1750111	0,5576867	0,0000000	0,0000014	0,0000407
0,12	0,2012250	0,5913244	0,0000000	0,0000026	0,0000673
0,13	0,2281454	0,6227452	0,0000001	0,0000044	0,0001067
0,14	0,2555963	0,6520722	0,0000001	0,0000074	0,0001633
0,15	0,2834159	0,6794229	0,0000003	0,0000119	0,0002423
0,16	0,3114559	0,7049097	0,0000004	0,0000185	0,0003499
0,17	0,3395864	0,7286395	0,0000007	0,0000279	0,0004891
0,18	0,3676661	0,7507145	0,0000011	0,0000413	0,0006816
0,19	0,3956008	0,7712321	0,0000017	0,0000596	0,0009239
0,20	0,4232832	0,7902848	0,0000026	0,0000845	0,0012314
0,21	0,4506224	0,8079609	0,0000038	0,0001176	0,0016164
0,22	0,4775369	0,8243443	0,0000055	0,0001611	0,0020926
0,23	0,5039547	0,8395148	0,0000078	0,0002176	0,0026751
0,24	0,5298122	0,8535481	0,0000110	0,0002899	0,0033805
0,25	0,5550537	0,8665161	0,0000153	0,0003815	0,0042267
0,26	0,5796314	0,8784872	0,0000209	0,0004964	0,0052329
0,27	0,6035043	0,8895260	0,0000282	0,0006391	0,0064109
0,28	0,6266383	0,8996939	0,0000378	0,0008150	0,0078097
0,29	0,6490053	0,9090488	0,0000500	0,0010298	0,0094256
0,30	0,6705828	0,9176457	0,0000656	0,0012903	0,0112922
0,31	0,6913541	0,9255365	0,0000853	0,0016040	0,0134351
0,32	0,7113070	0,9327701	0,0001100	0,0019971	0,0158811
0,33	0,7304340	9,9393929	0,0001406	0,0024250	0,0186577
0,34	0,7487320	0,9454484	0,0001786	0,0029518	0,0217935
0,35	0,7662014	0,9509777	0,0002252	0,0035708	0,0253175
0,36	0,7828465	0,9560195	0,0003512	0,0042944	0,0292594
0,37	0,7986743	0,9606102	0,0003512	0,0051358	0,0336492
0,38	0,8136952	0,9647839	0,0004348	0,0061098	0,038517[illegible]
0,39	0,8279219	0,9685726	0,0005352	0,0072321	0,0438932
0,40	0,8413696	0,9720064	0,0006554	0,0085197	0,0498074
0,41	0,8540554	0,9751135	0,0007985	0,0099909	0,0562892
0,42	0,8659982	0,9779202	0,0009683	0,0116653	0,0633676
0,43	0,8772187	0,9804510	0,0011688	0,0135637	0,0710705
0,44	0,8877388	0,9827291	0,0014048	0,0157085	0,0794247
0,45	0,8975816	0,9847756	0,0016815	0,0181230	0,0884559
0,46	0,9067711	0,9866107	0,0020048	0,0208321	0,0981878
0,47	0,9153321	0,9882529	0,0023811	0,0238619	0,1086426
0,48	0,9232900	0,9897193	0,0028179	0,0272400	0,1218402
0,49	0,9306706	0,9910259	0,0033233	0,0309948	0,1317981
0,50	0,9375000	0,9921875	0,0039062	0,0351562	0,1445312

p	$n=8,\ k=5$	$n=8,\ k=4$	$n=8,\ k=3$	$n=8,\ k=2$	$n=8,\ k=1$
0,01	0,0000000	0,0000007	0,0000539	0,0026901	0,0772553
0,02	0,0000002	0,0000105	0,0004155	0,0103369	0,1492370
0,03	0,0000013	0,0000515	0,0013499	0,0223408	0,2162566
0,04	0,0000052	0,0001574	0,0030797	0,0381472	0,2786104
0,05	0,0000154	0,0003718	0,0057882	0,0572447	0,3365796
0,06	0,0000373	0,0007456	0,0096229	0,0791618	0,3904311
0,07	0,0000786	0,0013359	0,0146987	0,1034657	0,4404192
0,08	0,0001493	0,0022033	0,0211005	0,1297593	0,4867811
0,09	0,0002619	0,0034113	0,0288868	0,1576795	0,5927475
0,10	0,0004316	0,0050244	0,0380918	0,1868953	0,5695328
0,11	0,0006765	0,0071068	0,0487281	0,2171054	0,6063411
0,12	0,0010169	0,0097216	0,0607892	0,2480369	0,6403655
0,13	0,0014759	0,0129297	0,0742514	0,2794433	0,6717883
0,14	0,0020790	0,0167887	0,0890764	0,3111029	0,7007821
0,15	0,0028539	0,0213525	0,1052128	0,3428170	0,7275095
0,16	0,0038303	0,0266703	0,1225980	0,3744085	0,7521241
0,17	0,0050399	0,0327863	0,1411603	0,4057205	0,7747708
0,18	0,0065160	0,0397393	0,1608200	0,4366148	0,7955859
0,19	0,0082929	0,0475622	0,1814910	0,4669707	0,8146980
0,20	0,0104064	0,0562816	0,2030822	0,4966835	0,8322278
0,21	0,0128926	0,0659180	0,2254991	0,5256634	0,8482891
0,22	0,0157883	0,0764853	0,2486441	0,5538346	0,8629886
0,23	0,0191302	0,0879910	0,2724183	0,5811335	0,8764264
0,24	0,0229548	0,1004362	0,2967223	0,6075088	0,8886965
0,25	0,0272980	0,1138153	0,3214569	0,6329193	0,8998871
0,26	0,0321948	0,1281168	0,3465239	0,6573339	0,9100805
0,27	0,0376789	0,1433229	0,3718268	0,6807302	0,9193540
0,28	0,0437826	0,1594099	0,3972716	0,7030939	0,9277796
0,29	0,0505362	0,1763486	0,4227673	0,7244179	0,9354246
0,30	0,0579676	0,1941044	0,4482262	0,7447017	0,9423520
0,31	0,0661027	0,2126377	0,4735644	0,7639506	0,9486202
0,32	0,0749644	0,2319043	0,4987023	0,7821752	0,9542837
0,33	0,0845724	0,2518558	0,5235647	0,7993904	0,9593932
0,34	0,0949435	0,2724399	0,5480813	0,8156156	0,9639959
0,35	0,1060909	0,2936006	0,5721863	0,8308731	0,9681355
0,36	0,1180242	0,3152791	0,5958195	0,8451888	0,9718525
0,37	0,1307490	0,3374141	0,6189255	0,8585906	0,9751844
0,38	0,1442673	0,3599420	0,6414542	0,8711089	0,9781660
0,39	0,1585766	0,3827973	0,6633607	0,8827757	0,9808293
0,40	0,1736704	0,4059136	0,6846054	0,8936243	0,9832038
0,41	0,1895380	0,4292234	0,7051539	0,9036892	0,9853170
0,42	0,2061644	0,4526588	0,7249765	0,9130054	0,9871937
0,43	0,2235301	0,4761522	0,7440490	0,9216086	0,9888571
0,44	0,2416115	0,4996359	0,7623517	0,9295345	0,9903283
0,45	0,2603807	0,5230437	0,7798697	0,9368189	0,9916266
0,46	0,2798056	0,5463101	0,7965925	0,9434974	0,9927698
0,47	0,2998501	0,5693713	0,8125139	0,9496049	0,9937740
0,48	0,3204741	0,5921658	0,8276319	0,9551761	0,9946540
0,49	0,3416336	0,6146339	0,8419484	0,9602447	0,9954232
0,50	0,3632812	0,6367188	0,8554688	0,9648438	0,9960938

p	$n=9,\ k=9$	$n=9,\ k=8$	$n=9,\ k=7$	$n=9,\ k=6$	$n=9,\ k=5$
0,01	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,02	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000004
0,03	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000028
0,04	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000113
0,05	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000012	0,0000332
0,06	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000033	0,0000798
0,07	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000082	0,0001666
0,08	0,0000000	0,0000000	0,0000007	0,0000178	0,0003136
0,09	0,0000000	0,0000000	0,0000015	0,0000351	0,0005453
0,10	0,0000000	0,0000001	0,0000030	0,0000642	0,0008909
0,11	0,0000000	0,0000002	0,0000057	0,0001106	0,0013838
0,12	0,0000000	0,0000003	0,0000103	0,0001813	0,0020615
0,13	0,0000000	0,0000006	0,0000177	0,0002847	0,0029647
0,14	0,0000000	0,0000012	0,0000292	0,0004315	0,0041384
0,15	0,0000000	0,0000020	0,0000464	0,0006340	0,0056287
0,16	0,0000001	0,0000033	0,0000715	0,0009068	0,0074847
0,17	0,0000001	0,0000053	0,0001071	0,0012664	0,0097568
0,18	0,0000002	0,0000083	0,0001565	0,0017318	0,0124962
0,19	0,0000003	0,0000127	0,0002238	0,0023240	0,0157541
0,20	0,0000005	0,0000189	0,0003139	0,0030664	0,0039844
0,21	0,0000008	0,0000277	0,0004323	0,0039844	0,0240280
0,22	0,0000012	0,0000379	0,0005861	0,0051056	0,0291417
0,23	0,0000018	0,0000561	0,0007828	0,0064598	0,0349682
0,24	0,0000026	0,0000779	0,0010316	0,0080784	0,0415503
0,25	0,0000038	0,0001068	0,0013428	0,0099945	0,0489273
0,26	0,0000054	0,0001445	0,0017279	0,0122430	0,0571345
0,27	0,0000076	0,0001932	0,0021999	0,0148598	0,0662028
0,28	0,0000106	0,0002554	0,0027735	0,0178821	0,0761583
0,29	0,0000145	0,0003342	0,0034646	0,0213477	0,0870218
0,30	0,0000197	0,0004330	0,0042909	0,0252948	0,0988087
0,31	0,0000264	0,0005561	0,0052716	0,0297621	0,1115286
0,32	0,0000352	0,0007081	0,0064277	0,0347877	0,1251852
0,33	0,0000464	0,0008945	0,0077818	0,0404096	0,1397759
0,34	0,0000607	0,0011215	0,0093580	0,0466645	0,1552923
0,35	0,0000788	0,0013962	0,0111822	0,0535882	0,1717193
0,36	0,0001016	0,0017265	0,0132818	0,0612147	0,1890360
0,37	0,0001300	0,0021215	0,0156858	0,0695762	0,2072151
0,38	0,0001652	0,0025913	0,0184246	0,0787022	0,2262237
0,39	0,0002087	0,0031470	0,0215299	0,0886197	0,2460227
0,40	0,0002621	0,0038011	0,0250348	0,0993526	0,2665677
0,41	0,0003274	0,0045674	0,0289732	0,1109212	0,2878090
0,42	0,0004067	0,0054610	0,0333803	0,1233422	0,2096920
0,43	0,0005026	0,0064986	0,0382916	0,1366281	0,3321576
0,44	0,0006181	0,0076984	0,0437436	0,1507869	0,3551423
0,45	0,0007567	0,0090802	0,0497728	0,1658220	0,3785791
0,46	0,0009222	0,0106653	0,0564157	0,1817320	0,4023977
0,47	0,0011191	0,0124771	0,0637089	0,1985102	0,4265251
0,48	0,0013526	0,0145405	0,0716881	0,2161445	0,4508861
0,49	0,0016284	0,0168823	0,0803884	0,2346175	0,4754037
0,50	0,0019531	0,0195312	0,0898437	0,2539062	0,5000000

p	n=9, k=4	n=9, k=3	n=9, k=2	n=9, k=1	n=10, k=10
0,01	0,0000012	0,0000803	0,0034357	0,0864828	0,0000000
0,02	0,0000186	0,0006139	0,0131149	0,1662522	0,0000000
0,03	0,0000904	0,0019796	0,0281582	0,2397689	0,0000000
0,04	0,0002743	0,0044824	0,0477658	0,3074660	0,0000000
0,05	0,0006426	0,0083610	0,0712114	0,3697506	0,0000000
0,06	0,0012783	0,0137953	0,0978380	0,4370052	0,0000000
0,07	0,0022713	0,0209123	0,1270524	0,4795889	0,0000000
0,08	0,0037151	0,0297932	0,1583210	0,5278386	0,0000000
0,09	0,0057041	0,0404781	0,1911657	0,5720702	0,0000000
0,10	0,0083311	0,0529721	0,2251590	0,6125795	0,0000000
0,11	0,0116851	0,0672496	0,2599213	0,6496436	0,0000000
0,12	0,0158497	0,0832589	0,2951163	0,6835216	0,0000000
0,13	0,0209015	0,1009264	0,3304482	0,7144558	0,0000000
0,14	0,0269090	0,1201601	0,3656580	0,7426726	0,0000000
0,15	0,0339315	0,1408534	0,4005208	0,7683831	0,0000000
0,16	0,0420187	0,1628877	0,4348430	0,7917843	0,0000000
0,17	0,0512099	0,1861356	0,4684590	0,8130597	0,0000000
0,18	0,0615338	0,2104631	0,5012296	0,8323804	0,0000000
0,19	0,0730086	0,2357321	0,5330389	0,8499054	0,0000001
0,20	0,0856417	0,2618025	0,5637924	0,8657823	0,0000001
0,21	0,0994300	0,2885336	0,5934148	0,8801484	0,0000002
0,22	0,1143602	0,3157860	0,6218484	0,8931311	0,0000003
0,23	0,1304093	0,3434228	0,6490509	0,9048483	0,0000004
0,24	0,1475448	0,3713111	0,6749938	0,9154094	0,0000006
0,25	0,1657257	0,3993225	0,6996613	0,9249153	0,0000010
0,26	0,1849026	0,4273345	0,7230480	0,9334596	0,0000014
0,27	0,2050189	0,4552307	0,7451586	0,9411284	0,0000021
0,28	0,2260112	0,4829018	0,7660059	0,9480013	0,0000030
0,29	0,2478100	0,5102460	0,7856098	0,9541515	0,0000042
0,30	0,2703409	0,5371688	0,8039968	0,9596464	0,0000059
0,31	0,2935250	0,5635841	0,8211982	0,9645479	0,0000082
0,32	0,3172797	0,5894136	0,8372499	0,9689129	0,0000113
0,33	0,3415198	0,6145872	0,8521914	0,9727935	0,0000153
0,34	0,3661579	0,6390429	0,8660649	0,9762373	0,0000206
0,35	0,3911056	0,6627267	0,8789150	0,9792881	0,0000276
0,36	0,4162737	0,6855925	0,8907877	0,9819856	0,0000366
0,37	0,4415733	0,7076016	0,9017303	0,9843662	0,0000481
0,38	0,4669166	0,7287230	0,9117906	0,9864629	0,0000628
0,39	0,4922170	0,7489326	0,9210166	0,9883059	0,0000814
0,40	0,5173903	0,7682130	0,9294561	0,9899223	0,0001049
0,41	0,5423549	0,7865533	0,9371566	0,9913370	0,0001342
0,42	0,5670323	0,8039487	0,9441645	0,9925723	0,0001708
0,43	0,5913478	0,8203997	0,9505255	0,9936485	0,0002161
0,44	0,6152309	0,8359122	0,9562838	0,9945838	0,0002720
0,45	0,6386154	0,8504969	0,9614824	0,9953946	0,0003405
0,46	0,6614400	0,8641687	0,9661627	0,9960957	0,0004242
0,47	0,6836483	0,8769467	0,9703644	0,9967002	0,0005260
0,48	0,7051895	0,8888531	0,9741255	0,9972201	0,0006493
0,49	0,7260180	0,8999136	0,9774822	0,9976658	0,0007979
0,50	0,7460938	0,9101563	0,9804688	0,9980469	0,0009766

p	$n=10,\ k=9$	$n=10,\ k=8$	$n=10,\ k=7$	$n=10,\ k=6$	$n=10,\ k=5$
0,01	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,02	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000007
0,03	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000054
0,04	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000007	0,0000218
0,05	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000028	0,0000637
0,06	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000079	0,0001517
0,07	0,0000000	0,0000000	0,0000008	0,0000193	0,0003139
0,08	0,0000000	0,0000001	0,0000020	0,0000415	0,0005857
0,09	0,0000000	0,0000002	0,0000045	0,0000810	0,0010096
0,10	0,0000000	0,0000004	0,0000091	0,0001469	0,0016349
0,11	0,0000000	0,0000008	0,0000173	0,0002507	0,0025170
0,12	0,0000000	0,0000015	0,0000308	0,0004069	0,0037161
0,13	0,0000001	0,0000029	0,0000525	0,0006332	0,0052967
0,14	0,0000002	0,0000051	0,0000856	0,0009505	0,0073263
0,15	0,0000003	0,0000087	0,0001346	0,0013832	0,0098741
0,16	0,0000006	0,0000142	0,0002051	0,0019593	0,0130101
0,17	0,0000010	0,0000226	0,0003042	0,0027098	0,0168038
0,18	0,0000017	0,0000350	0,0004401	0,0036694	0,0213229
0,19	0,0000027	0,0000528	0,0006229	0,0048757	0,0266325
0,20	0,0000042	0,0000779	0,0008644	0,0063694	0,0327935
0,21	0,0000064	0,0001127	0,0011783	0,0081935	0,0398624
0,22	0,0000097	0,0001599	0,0015804	0,0103936	0,0478897
0,23	0,0000143	0,0002232	0,0020885	0,0130167	0,0569196
0,24	0,0000207	0,0003068	0,0027228	0,0161116	0,0669890
0,25	0,0000296	0,0004158	0,0035057	0,0197277	0,0781269
0,26	0,0000416	0,0005362	0,0044618	0,0239148	0,0903542
0,27	0,0000577	0,0007350	0,0056181	0,0287224	0,1036831
0,28	0,0000791	0,0009605	0,0070039	0,0341994	0,1181171
0,29	0,0001072	0,0012420	0,0086507	0,0403932	0,1336503
0,30	0,0001437	0,0015904	0,0105921	0,0473490	0,1502683
0,31	0,0001906	0,0020179	0,0128637	0,0551097	0,1679475
0,32	0,0002505	0,0025384	0,0155029	0,0637149	0,1866554
0,33	0,0003263	0,0031673	0,0185489	0,0732005	0,2063514
0,34	0,0004214	0,0039219	0,0220422	0,0835979	0,2269866
0,35	0,0005399	0,0048213	0,0260243	0,0949341	0,2485045
0,36	0,0006865	0,0058864	0,0305376	0,1072304	0,2708415
0,37	0,0008668	0,0071403	0,0356252	0,1205026	0,2939277
0,38	0,0010871	0,0086079	0,0413301	0,1347603	0,3176870
0,39	0,0013546	0,0103163	0,0476949	0,1500068	0,3420385
0,40	0,0016777	0,0122946	0,0547619	0,1662386	0,3668967
0,41	0,0020658	0,0145738	0,0625719	0,1834452	0,3921728
0,42	0,0025295	0,0171871	0,0711643	0,2016094	0,4177749
0,43	0,0030809	0,0201696	0,0805763	0,2207058	0,4436094
0,44	0,0037335	0,0235583	0,0908427	0,2407033	0,4965813
0,45	0,0045022	0,0273918	0,1019949	0,2615627	0,4955954
0,46	0,0054040	0,0317105	0,1140612	0,2832382	0,5215571
0,47	0,0064574	0,0365560	0,1270655	0,3056772	0,5473730
0,48	0,0076828	0,0419713	0,1410272	0,3288205	0,5729517
0,49	0,0091028	0,0480003	0,1559607	0,3526028	0,5982047
0,50	0,0107422	0,0546875	0,1718750	0,3769531	0,6230469

p	$n=10,\ k=4$	$n=10,\ k=3$	$n=10,\ k=2$	$n=10,\ k=1$
0,01	0,0000020	0,0001138	0,0042662	0,0956179
0,02	0,0000305	0,0008639	0,0161776	0,1829272
0,03	0,0001471	0,0027650	0,0345066	0,2625759
0,04	0,0004426	0,0062137	0,0581538	0,3351674
0,05	0,0010285	0,0115036	0,0861384	0,4012631
0,06	0,0020293	0,0188378	0,1175880	0,4613849
0,07	0,0035761	0,0283421	0,1517299	0,1560177
0,08	0,0058013	0,0400754	0,1878825	0,5656115
0,09	0,0088338	0,0540400	0,2254471	0,6105839
0,10	0,0127952	0,0701908	0,2639011	0,6513216
0,11	0,0177972	0,0884435	0,3027908	0,6881828
0,12	0,0239388	0,1086818	0,3417250	0,7214990
0,13	0,0313048	0,1307642	0,3803692	0,7515766
0,14	0,0399642	0,1535298	0,4184400	0,7786984
0,15	0,0499698	0,1789035	0,4557002	0,8031256
0,16	0,0613577	0,2064005	0,4919536	0,8250988
0,17	0,0741472	0,2341305	0,5270412	0,8448396
0,18	0,0883411	0,2628010	0,5608368	0,8625520
0,19	0,1039261	0,2922204	0,5932435	0,8784233
0,20	0,1208739	0,3222005	0,6241904	0,8926258
0,21	0,1391418	0,3525586	0,6536289	0,9053172
0,22	0,1586739	0,3831197	0,6815306	0,9166422
0,23	0,1794024	0,4137173	0,7078843	0,9267332
0,24	0,2012487	0,4441949	0,7326936	0,9357111
0,25	0,2241249	0,4744072	0,7559748	0,9436865
0,26	0,2479349	0,5042200	0,7777550	0,9507601
0,27	0,2725761	0,5335112	0,7980705	0,9570237
0,28	0,2979405	0,5621710	0,8169646	0,9625609
0,29	0,3239164	0,5901015	0,8344869	0,9674476
0,30	0,3503893	0,6172172	0,8506917	0,9717525
0,31	0,3772433	0,6434445	0,8656366	0,9755381
0,32	0,4043626	0,6687212	0,8793821	0,9788608
0,33	0,4316320	0,6929966	0,8919901	0,9817716
0,34	0,4589388	0,7162304	0,9035235	0,9843166
0,35	0,4861730	0,7383926	0,9140456	0,9865373
0,36	0,5132284	0,7594627	0,9236190	0,9884708
0,37	0,5400038	0,7794292	0,9323056	0,9901507
0,38	0,5664030	0,7982887	0,9401661	0,9916070
0,39	0,5923361	0,8160453	0,9472594	0,9928666
0,40	0,6177194	0,8327102	0,9536426	0,9939534
0,41	0,6424762	0,8483007	0,9593705	0,9948888
0,42	0,6665372	0,8628393	0,9644958	0,9956920
0,43	0,6898401	0,8763538	0,9690684	0,9963797
0,44	0,7123307	0,8888757	0,9731358	0,9969669
0,45	0,7339621	0,9004403	0,9767429	0,9974670
0,46	0,7546952	0,9110859	0,9799319	0,9978917
0,47	0,7744985	0,9208530	0,9827422	0,9982511
0,48	0,7933480	0,9297839	0,9852109	0,9985544
0,49	0,8112268	0,9379222	0,9873722	0,9988096
0,50	0,8281250	0,9453125	0,9892578	0,9990234

ОТВЕТЫ

ГЛАВА I

§ 1, пункт 1

1. *Г* и *Ц* несовместны.

2. C и D несовместны; совместны A и B, A и C, B и D; $C \subset A$, $D \subset B$.

3. Несовместны A и B, A и C, A и D, A и H, B и C; совместны B и H, C и D, C и H, D и H; $B \subset H$, $C \subset H$, $C \subset D$, $D \subset C$, $D \subset H$; из того, что $C \subset D$ и $D \subset C$, следует, что $C = D$.

4. A и B совместны, A и C несовместны; B и C совместны, $C \subset B$.

5. Нет.

6. Нет.

7. $H =$ «лишь на одной из монет выпала цифра».

8. $\{A; B; C\}$, или $\{A; B; D\}$, или $\{A; H\}$.

§ 1, пункт 2

20. Нет (верно лишь в случае $A \cap B = U$).

21. См. рис. 76 и 77.

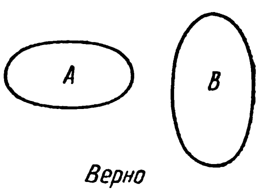


Рис. 76.

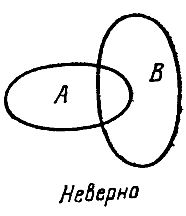


Рис. 77.

24. а) Верно при $A \cap B = U$; б) верно при $A \subset B$; в) только в случае $A = B = U$.

25. а) $\bigcup\limits_{i=1}^{57} A_i$; б) $\bigcup\limits_{i=1}^{11} A_{3i-1}$; в) $\bigcap\limits_{i=1}^{43} A_i$; г) $\bigcap\limits_{i=1}^{20} A_{5i+2}$.

26. а) $A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup \ldots \cup A_{11}$; б) $A_2 \cap A_8 \cap \ldots \cap A_7$; в) $A_1 \cup A_5 \cup A_9 \cup A_{13} \cup A_{17}$; г) $A_5 \cap A_7 \cap A_9 \cap A_{11}$.

27. а) $A \cup C = M$; б) $A \cap C = K$; в) $M \cap F = G$; г) $G \cup M = M$; д) $G \cap M = G$; е) $B \cap D = H$; ж) $M \cup K = M$.

28. $A=A_1\cap A_2\cap A_3$, $B=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$, $C=A_1\cup A_2\cup A_3$, $D=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$, $M=(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)\cup(A_2\cap A_3)$, $F=(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2)\cup(\overline{A}_1\cap\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_2\cap\overline{A}_3)$, $G=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2$.

29. а) $A\cup B=B$; б) $A\cap B=A$; в) $B\cup C=B$; г) $B\cap C=C$; д) $D\cup M\cup F=C$; е) $B\cap F=F$; ж) да; з) нет.

30. $\overline{A}$ — выпадение цифры, $\overline{B}$ — появление красного или черного шара, $\overline{C}$ — хотя бы один промах, $\overline{M}$ — не менее трех попаданий, $\overline{D}$ — пять промахов, $\overline{F}$ — выигрыш второго игрока или ничья.

31. Рис. 10: $A=A_1\cap A_2\cap A_3$, $\overline{A}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$;

рис. 11: $A=A_1\cup A_2\cup A_3$; $\overline{A}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$;

рис. 12: $A=(A_1\cap A_3)\cup A_2$, $\overline{A}=(\overline{A}_1\cup\overline{A}_3)\cap\overline{A}_2$;

рис. 13: $A=A_1\cap(A_2\cup A_3)$, $\overline{A}=\overline{A}_1\cup(\overline{A}_2\cap\overline{A}_3)$.

32. $A=A_1\cup A_2$, $B=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2$,

$$C=(B_1\cap B_2)\cup(B_1\cap B_3)\cup(B_2\cap B_3),$$
$$D=(\overline{B}_1\cap\overline{B}_2)\cup(\overline{B}_1\cap\overline{B}_2)\cup(\overline{B}_2\cap\overline{B}_3),$$
$$H=A\cap C=(A_1\cup A_2)\cap\left(\bigcup_{i\neq j}(B_i\cap B_j)\right),$$
$$F=B\cup D=(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2)\cup\left(\bigcup_{i\neq j}(\overline{B}_i\cap\overline{B}_j)\right).$$

33. $A=\bigcup\limits_{i\neq j}(A_i\cap A_j)$, $B=\bigcup\limits_{i\neq j\neq k}(\overline{A}_i\cap\overline{A}_j\cap\overline{A}_k)$,

$$C=\bigcup_{i=j=k}(B_i\cap B_j\cap B_k),$$
$$H=A\cap C=\left(\bigcup_{i\neq j}(A_i\cap A_j)\right)\cap\left(\bigcup_{i\neq j\neq k}(B_i\cap B_j\cap B_k)\right),$$
$$F=B\cup D=\left(\bigcup_{i\neq j\neq k}(\overline{A}_i\cap\overline{A}_j\cap\overline{A}_k)\right)\cup\left(\bigcup_{i\neq j\neq k}(\overline{B}_i\cap\overline{B}_j\cap\overline{B}_k)\right).$$

34. а) Деталь не третьего сорта; б) B; в) U; г) C.

41. $A=B$. 42. $A\cap B=U$. 43. $A=E$. 44. $A=U$. 45. A. 46. $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$. 47. $A\cup B\cup C$. 48. B.

§ 2, пункт 1

1. $\frac{1}{6}$. 2. $\frac{1}{4}$. 3. $P(A)=P(B)=P(C)=P(H)=\frac{1}{4}$.

4. $P(A_k)=\frac{1}{7}$. 5. $P(K)=\frac{1}{2}$.

§ 2, пункт 2

1. Да. 2. Как правило, нет. 3. Как правило, нет. 4. A и B равновероятны, A и C — нет. 5. Да. 6. Да.

7. 1 — да, 2 — да, 3 — да, 4 — да, 5 — нет, 6 — нет.

8. Опыт — бросание двух монет; исходы: A = «выпали две цифры», B = «выпало два герба» и C = «выпал герб и цифра».

9. Опыт — подсчитывается сумма очков на вынутой косточке домино; события: A = «сумма равна 3», B = «сумма равна 5» и C = «сумма равна 9».

10. Опыт — подсчитываем сумму S очков на вынутой косточке домино; события: A = «S четно», B = «S нечетно», C = «$S < 3$» и D = «$S \geqslant 5$».

11. $\frac{1}{6}$. 12. $\frac{1}{6}$. 13. $\frac{1}{2}$. 14. $\frac{1}{2}$. 15. $\frac{1}{3}$. 16. $\frac{1}{2}$.

17.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

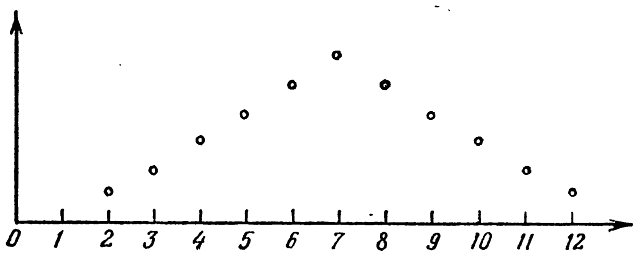


Рис. 78.

18.

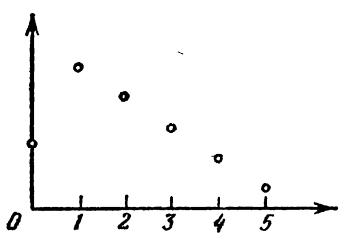


Рис. 79.

0	1	2	3	4	5
$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$

19. $\frac{11}{36}$. **20.** 0,3. **21.** 0,096. **22.** $\frac{3}{7}$. **23.** $\frac{1}{720}$. **24.** $\frac{1}{20}$. **25.** $\frac{1}{360}$.

26. а) $\frac{31\cdot 30\cdot 29}{37\cdot 36\cdot 35}\approx 0{,}58$; б) $\frac{775}{777}\approx 0{,}9974$. **27.** $\frac{4}{9}$. **28.** $\frac{1}{4}$. **29.** $\frac{13}{28}$.

30. $\frac{3}{28}$. **31.** $\frac{1}{7^5}$. **32.** $\frac{3}{5}$. **33.** $\frac{2}{5}$. **34.** $\frac{48}{95}$. **35.** $\frac{C_8^3\cdot C_{12}^5}{C_{20}^8}\approx 0{,}35$.

36. $\frac{C_8^3\cdot C_{12}^5+C_8^2\cdot C_{12}^6+C_8^1\cdot C_{12}^7+C_{12}^8}{C_{20}^8}\approx 0{,}6117$. **37.** $\frac{C_{13}^3\cdot C_{10}^2\cdot C_7^3}{C_{30}^8}\approx 0{,}077$.

38. $\frac{1}{n}$, где n — число равновероятных исходов опыта. **39.** Нет.

40. $\frac{1}{k}$, от места в очереди не зависит. **41.** $\frac{3}{11}$. **42.** $\frac{p}{k}$ для каждого.

43. $1-\frac{n-l}{n}\cdot\frac{n-l-1}{n-1}\cdot\frac{n-l-2}{n-2}\cdots\frac{n-l-k+1}{n-k+1}$.

44. а) $\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{10^5}=0{,}3024$; б) $\frac{5^5}{10^5}=\frac{1}{32}=0{,}03125$.

45. а) $\frac{C_{31}^3}{C_{37}^3}\approx 0{,}579$; б) $\frac{C_{31}^3+6\cdot C_{31}^2+C_6^2\cdot C_{31}^1}{C_{37}^3}\approx 0{,}9973$.

46. а) 4/9; б) 0,00033. **47.** $P(E)=1$, $P(U)=0$.

§ 2, пункт 3

1. $P(A)=0{,}85$, $P(B)=0{,}25$.

2. $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$.

3. $1-\frac{C_{12}^3}{C_{20}^3}\approx 0{,}8$. **4.** $\frac{C_{12}^6+C_{12}^5\cdot 8}{C_{20}^6}\approx 0{,}187$. **5.** $1-\frac{C_{12}^5+8C_{12}^4}{C_{20}^5}\approx 0{,}693$. **6.** а) 0,9; б) 0,6. **7.** $\frac{C_{12}^2+C_8^2}{C_{20}^2}\approx 0{,}494$. **8.** $1-\frac{8\cdot 10\cdot 12\cdot 6}{30\cdot 29\cdot 28}\approx 0{,}763$. **9.** $1-0{,}85\cdot 0{,}9\cdot 0{,}88\approx 0{,}3268$.

§ 2, пункт 4

4. $\frac{3}{4}$. **5.** $\frac{1}{5}$. **6.** $\frac{1}{3}$. **7.** $\frac{1}{4}$. **8.** $\frac{2}{\pi}\approx 0{,}636$. **9.** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx 0{,}41$.

10. 0. **11.** 0. **12.** $\frac{5}{9}$. **13.** $\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\approx 0{,}368$. **14.** $\frac{2}{3\sqrt{3}\pi}\approx 0{,}123$. **15.** $\frac{13}{24}$.

§ 3, пункт 1

3. а) 0,72; б) 0,02. **6.** $1-P(\bar{A})P(\bar{B})$. **7.** $1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$.

8. $1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n)$. **9.** 0,985. **10.** 0,14. **11.** 0,425. **12.** 0,42. **13.** 0,015. **14.** $(0{,}99)^4\approx 0{,}96$. **15.** $(1-p)^k$. **16.** Нет. **17.** $1-0{,}85\cdot 0{,}9\cdot 0{,}88=0{,}3268$. **18.** 0,727. **19.** 0,92. **20.** 0,3 и 0,6. **21.** $P(B)=\frac{p_1+p_2+p_3}{3}p$, $P(C)=pp_0\left(1-\frac{p_1+p_2+p_3}{3}\right)$, $P(A)=P(B)+P(C)$. **22.** $1-p_1p_2\ldots p_n$.

§ 3, пункт 2

2. $\frac{2}{3}$. **3.** $\frac{1}{8}$. **4.** $\frac{3}{5}$. **5.** $\frac{14}{95}$. **6.** $\frac{48}{95}$. **7.** 0,77. **8.** 0,003091. **9.** 0,021(6). **10.** 0,594. **11.** 0,13. **12.** а) $p(1-p)$; б) $1-(1-p)^2$. **13.** $p_1(1-(1-p_2p_3)^2)$.

14. а) $p_1+(1-p_1)(1-p_2)p_3$; б) $p_2(1-p_1)$; в) $p_1+p_2+p_3-p_1p_2-p_1p_3-p_2p_3+p_1p_2p_3$.

15. $P(A)=pp_1+(1-p)\alpha$, $P(B)=(1-p)\alpha$, $P(C)=p(1-p)$.

16. $P(A)=(1-p)(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1\alpha_2)+p(p_1+p_2-p_1p_2)$, $P(B)=(1-p)(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1\alpha_2)$, $P(C)=p(1-p_1)(1-p_2)$.

20. $\frac{28}{45}$. **21.** 0,0031. **22.** 0,024. **23.** 0,87. **24.** $\frac{S_1}{S}p_1+\frac{S_2}{S}p_2+\frac{S_3}{S}p_3$. **25.** $\frac{a+b+\frac{c}{3}}{a+b+c}$.

§ 3, пункт 3

1. а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{2}{5}$. **2.** $\frac{9}{11}$. **3.** $\frac{2}{3}$.

4. Вероятнее, что поставлен предохранитель первого типа.

5. Вероятнее всего, что студент учится во второй группе. **6.** 0,998.

7. Вероятнее, что винтовка без оптического прицела.

8. $\frac{3}{7}$. **9.** $\frac{18}{29}$. **10.** $\frac{10}{19}$. **11.** $\frac{2}{19}$; $\frac{9}{38}$; $\frac{25}{38}$. **12.** 0,322. **13.** а) 0,58; б) 0,002.

§ 4, пункт 1

3. $C_{10}^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^7\approx 0,152$; $C_{10}^1\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^9\approx 0,323$.

4. $P_{0,10}+P_{1,10}+P_{2,10}+P_{3,10}=0,93$.

5. $P_{3,10}+P_{4,10}\approx 0,488$.

6. а) $\frac{1}{4}$ и $\frac{7}{32}$ — вероятнее выиграть три партии из четырех; б) $\frac{5}{16}$ и $\frac{93}{256}$ — вероятнее выиграть не менее пяти партий из восьми.

7. 50; $C_{100}^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\approx 0,0796$.

8. а) $C_6^4\cdot(0,8)^4\cdot(0,2)^2\approx 0,24$; б) $(0,8)^6\approx 0,26$; в) $(0,2)^6=64\cdot 10^{-6}$.

9. $1-5\cdot(0,7)^4\cdot 0,3-(0,7)^5=0,47178$.

10. $1-6\cdot 0,4\cdot(0,6)^5-(0,6)^6=0,76672$.

11. а) $P_{0,8}+P_{1,8}+P_{2,8}=\frac{3^6\cdot 61}{4^8}\approx 0,68$; б) $1-P_{0,8}-P_{1,8}\approx 0,63$; в) $P_{1,8}+P_{2,8}+P_{3,8}\approx 0,78$; г) $P_{5,8}+P_{6,8}+P_{7,8}+P_{8,8}\approx 0,0273$; д) $m\approx np=2$.

12. а) $P_{2,5}=\frac{5}{16}=0{,}3125$; б) $P_{0,5}+P_{1,5}=\frac{3}{16}=0{,}1875$; в) $1-P_{0,5}-P_{1,5}-P_{2,5}=0{,}5$.

13. а) $P_{2,7}=\frac{21\cdot 4^2\cdot 6^5}{10^7}=0{,}2612736$; б) $P_{0,7}+P_{1,7}+P_{2,7}=0{,}419904\approx 0{,}42$; в) $1-P_{0,7}-P_{1,7}-P_{2,7}\approx 0{,}58$.

14. а) $P_{1,2}\cdot 0{,}9+P_{2,2}\cdot 0{,}99=0{,}9639$; б) $P_{1,3}\cdot 0{,}9+P_{2,3}\cdot 0{,}99+P_{3,3}\cdot 0{,}999=0{,}993141$.

15. а) $180\cdot\frac{1}{6}=30$; б) $180\cdot\frac{1}{2}=90$. 16. $C_7^2\cdot(0{,}9)^5\cdot(0{,}1)^2\approx 0{,}124$.

§ 4, пункт 3

1. а) $\frac{1}{10}\varphi(0)\approx 0{,}04$; б) $\frac{1}{10}\varphi(4)=1{,}34\cdot 10^{-5}$; в) $\Phi(1{,}4)-\Phi(0{,}4)\approx 0{,}264$; г) $\Phi(0{,}6)+\Phi(0{,}4)\approx 0{,}38$.

2. а) $\frac{3}{25}\varphi(0{,}16)\approx 0{,}047$; б) $\frac{6}{50}\varphi(0{,}64)\approx 0{,}039$; в) $\Phi\left(\frac{2}{50}\right)-\Phi\left(-\frac{80}{50}\right)\approx 0{,}43$; г) $\Phi(0{,}8)-\Phi(-0{,}88)\approx 0{,}60$.

3. $\Phi(1{,}2)+\Phi(0{,}8)\approx 0{,}673$.

4. а) $\Phi(1{,}25)+\Phi(5)=0{,}894$; б) $0{,}5+\Phi(5)=1-3\cdot 10^{-7}$.

5. а) $\frac{6}{\sqrt{21000}}\varphi(0)=0{,}0164$; б) $\frac{6}{10\sqrt{210}}\varphi(8{,}3)$; в) $\Phi\left(-\frac{50\cdot 6}{10\sqrt{210}}\right)-\Phi\left(-\frac{200\cdot 6}{10\sqrt{210}}\right)\approx 0{,}019$; г) $\Phi\left(\frac{30\cdot 6}{10\sqrt{210}}\right)-\Phi\left(-\frac{20\cdot 6}{10\sqrt{210}}\right)\approx 0{,}690$.

6. а) $\frac{1}{8}\varphi(0)\approx 0{,}05$; б) $\frac{1}{8}\varphi\left(\frac{5}{4}\right)\approx 0{,}0228$; в) $\Phi\left(\frac{5}{4}\right)-\Phi\left(-\frac{5}{4}\right)\approx 0{,}7887$; г) $\Phi\left(\frac{1}{4}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)\approx 0{,}92$; д) $\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{1}{4}\right)\approx 0{,}60$; е) $\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{1}{4}\right)\approx 0{,}4$.

7. $\Phi(2)=0{,}9545$. 8. $2\Phi(4)=0{,}9999366$.

ГЛАВА II

§ 5, пункт 1

1. $M\xi_1=0{,}2$; $M\xi_2=1{,}8$; $M\xi_3=0{,}9$; $M\xi_4=-0{,}4$; $M\xi_5=1{,}3$.
2. 3,4. 3. —0,4. 4. 0,9. 5. 1,3. 6. — 8,6. 7. 7,1. 8. — 6. 9. — 7,7.
10. 12,9. 11. 271,9. 12. 0,2625. 13. $\frac{145}{240}$. 14. 12,4. 15. 23,2.

§ 5, пункт 2

1.

ξ_1	-5	-2	0	1	3	7
P	0,1	0,3	0,1	0,3	0,1	0,1

ξ_2	-7	-1	0	3	4	5	10
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1

ξ_3	-6	-2	0	1	3	5
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,3

ξ_4	-7	-5	-3	0	4	6
P	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1

ξ_5	-5	0	1	7	10
P	0,3	0,3	0,1	0,1	0,2

3.

ξ	-3	0	1
P	0,5	0,3	0,2

0,2

4.

η	-1	0	3
P	0,51	0,14	0,35

0,04

5. 0,3. **6.** 0,5. **7.** 0,5. **8.** 0,4. **9.** 0,9. **10.** 0,3. **11.** 0,51. **12.** 0,5 **13.** 0,65. **14.** 0,8. **15.** 0,65. **16.** 0. **17.** 0. **18.** $(\xi=-3)\cup(\xi=0)$ **19.** $(\xi=0)\cup(\xi=1)$. **20.** $(\xi=0)\cup(\xi=-3)$. **21.** $(\eta=-1)\cup(\eta=0)$ **22.** $(\eta=0)\cup(\eta=3)$. **23.** $(\eta=0)\cup(\eta=3)$.

§ 5, пункт 3

1. 0,01.

2.

$\xi\eta$	−15	−8	−5	−3	−1	0	2	4	10	12
P	0,01	0,09	0,04	0,06	0,24	0,2	0,18	0,12	0,03	0,03

6. −0,84.

7.

$\xi\eta$	−12	−6	−3	−1	0	1	2	3	4
P	0,03	0,09	0,12	0,04	0,5	0,08	0,06	0,06	0,02

§ 5, пункт 4

4. 39,04. 5. 19,36. 6. 108,81. 7. 39,2 и 29,12. 8. 25,01 и 31,45. 9. 100.

§ 5, пункт 5

1. 0,195. 2. −0,372. 3. 0,42.

§ 6, пункт 1

$$F_1(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant -5,\\ 0,1, & -5<x\leqslant -2,\\ 0,4, & -2<x\leqslant 0,\\ 0,5, & 0<x\leqslant 1,\\ 0,8, & 1<x\leqslant 3,\\ 0,9, & 3<x\leqslant 7,\\ 1, & 7<x;\end{cases}\qquad F_2(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant -7,\\ 0,1, & -7<x\leqslant -1,\\ 0,3, & -1<x\leqslant 0,\\ 0,5, & 0<x\leqslant 3,\\ 0,6, & 3<x\leqslant 4,\\ 0,7, & 4<x\leqslant 5,\\ 0,9, & 5<x\leqslant 10,\\ 1, & x>10;\end{cases}$$

$$F_3(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant -6,\\ 0,1, & -6<x\leqslant -2,\\ 0,3, & -2<x\leqslant 0,\\ 0,5, & 0<x\leqslant 1,\\ 0,6, & 1<x\leqslant 3,\\ 0,7, & 3<x\leqslant 5,\\ 1, & 5<x;\end{cases}\qquad F_4(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant -7,\\ 0,2, & -7<x\leqslant -5,\\ 0,3, & -5<x\leqslant -3,\\ 0,4, & -3<x\leqslant 0,\\ 0,6, & 0<x\leqslant 4,\\ 0,9, & 4<x\leqslant 6,\\ 1, & 6<x;\end{cases}$$

$$F_5(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant -5,\\ 0,3, & -5<x\leqslant 0,\\ 0,6, & 0<x\leqslant 1,\\ 0,7, & 1<x\leqslant 7,\\ 0,8, & 7<x\leqslant 10,\\ 1, & 10<x.\end{cases}$$

Функция распределения $F_k(x)=P(\xi_k<x)$, $k=1, 2, 3, 4, 5$.

6. $h=\frac{10}{14}$; $\frac{3}{7}$; $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 1{,}3, \\ \frac{x-1{,}3}{1{,}4} & \text{при } 1{,}3<x\leqslant 2{,}7, \\ 1 & \text{при } 2{,}7<x. \end{cases}$

7. $A=\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0, \\ \sin^2\frac{x}{2} & \text{при } 0<x\leqslant\pi, \\ 1 & \text{при } \pi<x. \end{cases}$

8. $a=6$; $\frac{1}{4}$; $F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant-\frac{\pi}{12}, \\ \frac{1}{2}\left(1+\sin 6x\right), & -\frac{\pi}{12}<x\leqslant\frac{\pi}{12}, \\ 1, & \frac{\pi}{12}<x. \end{cases}$

9. а) Нет; б) да; в) нет; г) нет.

10. а) $a=2$; $p(x)=\begin{cases} 0, & x\notin[0;\ 2], \\ 1-\frac{x}{2}, & x\in[0,\ 2]; \end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0, \\ x-\frac{x^2}{4} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 2, \\ 1 & \text{при } 2<x; \end{cases}$ в) $\frac{1}{4}$.

11. а) $p(x)=\begin{cases} 0, & x\notin[a;\ b], \\ \frac{1}{b-a}, & x\in[a;\ b]; \end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a<x<b, \\ 1 & \text{при } b\leqslant x; \end{cases}$ в) 0,25.

12. а) $\frac{1}{a}$; б) $p(x)=\begin{cases} 0, & x\notin[-a;\ a], \\ -\frac{|x|}{a^2}+\frac{1}{a}, & x\in[-a;\ a]; \end{cases}$

$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant -a, \\ \frac{(x+a)^2}{2a^2} & \text{при } -a<x\leqslant 0, \\ 1-\frac{(x-a)^2}{2a^2} & \text{при } 0<x\leqslant a, \\ 1 & \text{при } a<x; \end{cases}$ в) $\frac{7}{9}$; г) $\frac{7}{8}$.

§ 6, пункт 2

1. 2 и 0,163. 2. $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi^2-8}{4}$. 3. 0 и $\frac{1}{144}(\pi^2-8)$. 4. $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{9}$
5. $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{(b-a)^2}{12}$. 6. 0 и $\frac{a^2}{6}$.

§ 6, пункт 3

1. $M\xi=\frac{1}{3}$; $\nu_k=\frac{k!}{3^k}$; $D\xi=\mu_2=\frac{1}{9}$; $\mu_3=\frac{2}{27}$; $\mu_4=\frac{1}{9}$.

2. $M\xi=\frac{9}{8}$; $\nu_k=\frac{9}{9-k}$ при $k<9$ и не существует при $k\geqslant 9$; $\mu_2=\frac{9}{448}\approx 0{,}02$.

3. $M\xi=0$; $\nu_k=\mu_k=\begin{cases} 0, & k \text{ нечетно}, \\ \frac{0{,}8}{k+1}+\frac{1{,}4}{7-k}, & k \text{ четно}, \end{cases}$ и не существует при $k\geqslant 7$.

4. $M\xi=0$; $\nu_k=\mu_k=\begin{cases} 0, & k \text{ нечетно}, \\ k!, & k \text{ четно}. \end{cases}$

5. $M\xi=\frac{4}{21}$; $\nu_2=\frac{1}{2}$; $\mu_2=D\xi=\frac{850}{1764}\approx 0{,}482$.

6. а) $\mu_k=(k!)\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^{k-l}}{(k-l)!}$; б) $\mu_2=\frac{2}{9}$, $\mu_3=\frac{20}{27}$.

8.

ξ	$-1{,}5$	1	2
P	$\frac{16}{35}$	$\frac{14}{35}$	$\frac{5}{35}$

9. $\mu_k=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}C_k^l\nu_1^{k-l}\nu_l$;
$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2$;
$\mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3$;
$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_1^2\nu_2-3\nu_1^4$.

§ 6, пункт 4

1. а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{1}{12}$. 2. а) $\frac{18}{35}$; б) $\frac{9}{140}$; в) $\frac{9\pi}{70}\approx 0{,}405$; г) $\frac{1}{7}$.

§ 7, пункт 1

1. 2 и $\frac{25}{3}$. 2. 3 и $\frac{4}{3}$. 3. -5 и 3. 4. 2,2 и $\frac{1}{300}$.

§ 7, пункт 2

1. 4 и 2,4. 2. 3 и 2,7. 3. 80 и 16. 4. 10 и 8.

§ 7, пункт 3

1. 0,3; 0,033337; 10^{-12}. 2. 4; 0,195367; 0,05954. 3. 1,2; 0,21685; $6\cdot 10^{-9}$. 4. 0,7; 0,028388; $16\cdot 10^{-23}$. 5. 0,000038 и 0,036089. 6. $7\cdot 10^{-11}$ и 0,224042. 7. 10^{-7} и 0,318399. 8. 0,00529 и 0,000015. 9. $\frac{(1{,}5)^m}{m!}e^{-1{,}5}$. 10. $\frac{(3{,}8)^m}{m!}e^{-3{,}8}$. 11. $\frac{7^m}{m!}e^{-7}$. 12. $\frac{(4{,}2)^m}{m!}e^{-4{,}2}$. 13. $\frac{(2{,}3)^m}{m!}e^{-2{,}3}$. 14. $\frac{(7{,}4)^m}{m!}e^{-7{,}4}$. 15. $\frac{(a+b+c)^m}{m!}e^{-(a+b+c)}$. 16. $\frac{\left(\sum a_k\right)^m}{m!}e^{-\sum a_k}$.

§ 7, пункт 4

1. $p(x)=\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x-3}{2}\right)$; $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-3}{2}\right)$.

2. $p(x)=\frac{1}{3}\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right)$; $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x+1}{3}\right)$.

3. $p(x)=\varphi(x)$; $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi(x)$.

4. $p(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\varphi\left(\frac{x+2}{\sqrt[4]{3}}\right)$; $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x+2}{\sqrt[4]{3}}\right)$.

5. Нормальный закон; 1 и 25.
6. Нормальный закон; —2 и 9.
7. Нормальный закон; — 1 и 7/2. **8.** 0,135905 и 0,682690.

9. 0,682690 и 0,157305. **10.** 0,546746 и 0,382924. **11.** 0,987580 и $0{,}5-3\cdot 10^{-7}$. **12.** 0,866386 и 0,954500. **13.** 0,382924 и 0,954500 и 0,866386. **14.** Около 95. **15.** 0,3. **16.** 0,2. **17.** 0,29. **18.** 3σ. **19.**]9,7; 10,3[.

20. а) 0,682690; б) 0,954500; в) 0,9973; г) $1-3\cdot 10^{-5}$.

21. $p(x)=\frac{1}{\sqrt{13}}\varphi\left(\frac{x+1}{\sqrt{13}}\right)$; $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x+1}{\sqrt{13}}\right)$.

22. $p(x)=\frac{1}{3}\varphi\left(\frac{x-4}{3}\right)$; $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-4}{3}\right)$.

23. $p(x)=\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)$; $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

24. $p(x)=\frac{1}{\sqrt{4,13}}\varphi\left(\frac{x-2}{\sqrt{4,13}}\right)$; $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-2}{\sqrt{4,13}}\right)$.

25. $p(x)=\frac{1}{\sqrt{13,64}}\varphi\left(\frac{x+2}{\sqrt{13,64}}\right)$; $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x+2}{\sqrt{13,64}}\right)$.

26. $p(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ и $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, где

$$m=\sum_{k=1}^{n} m_k \text{ и } \sigma=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}.$$

§ 7, пункт 5

1. $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, $F(x)=1-e^{-2x}$ при $x\geqslant 0$.
2. 10 и 100, $F(x)=1-e^{0,1x}$ при $x\geqslant 0$.
3. 0,04 и 5^{-4}, $F(x)=1-e^{-25x}$ при $x\geqslant 0$.

§ 8, пункт 1

1. 0,1. **2.** $a\geqslant 0{,}3$. **3.** $a\geqslant 0{,}5$.

§ 8, пункт 2

1. 94%. **2.** 0,24. **3.** 800.

§ 8, пункт 3

1. 99,998%. **2.** 0,013. **3.** 216.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика.— М.: ИЛ, 1960.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей.— М.: Физматгиз, 1962.
3. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей (задачи и упражнения).— М.: Наука, 1969.
4. Гмурман В. Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику.— М.: Высшая школа, 1966.
5. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.— М.: Высшая школа, 1970.
6. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.— М.: Физматгиз, 1961.
7. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей.— М.: Наука, 1970.
8. Емельянов Г. В., Скитович В. П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1967.
9. Жевержеев В. Ф., Кальницкий Л. А., Сапогов Н. А. Специальный курс высшей математики для втузов.— М.: Высшая школа, 1970.
10. Лихолетов И. И., Мацкевич И. П. Руководство к решению задач по высшей математике с основами математической статистики и теории вероятностей.— Минск: Высшая школа, 1966.
11. Румшиский Л. З. Элементы теории вероятностей.— М.: Наука, 1966.
12. Свешников А. А., Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я., Комаров Л. Б., Старобин К. Б. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций.— М.: Наука, 1965.
13. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики.— М.: Наука, 1969.
14. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: ИЛ. 1952.
15. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями.— М.: ИЛ, 1956.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ